บทที่ 1

เซต (Sets)

เซต เป็นคำอนิยาม คือไม่ต้องให้ความหมาย แต่ก็มีความหมายแทนสิ่งของที่อยู่เป็นกลุ่ม หมู่ ชุด เหล่า คณะ เช่น

เซตของชื่อเดือนในหนึ่งปี

เซตของพยัญชนะที่อยู่ในคำ “กระสังพิทยาคม”

เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5

สิ่งที่อยู่ภายในเซตเรียกว่า **สมาชิก (Elements)**

1.1 การเขียนเซต

โดยทั่วไปใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A , B , C , ... , Z แทนชื่อเซต และใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก a , b , c , ... , z แทนสมาชิกของเซต

การเขียนเซต มี 2 แบบ คือ

(1) การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก จะเขียนสมาชิกทุกตัวไว้ในวงเล็บปีกกา “$\{\ \}$” และสมาชิกแต่ละตัวคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,) เช่น

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{1,2,3,...\}$

$C = \{a,e,i,o,u\}$

ข้อสังเกต การเขียนสมาชิกของเซตไม่นิยมเขียนซ้ำกัน เช่น $\{1,2,3,3,4\}$ และ $\{1,2,3,4\}$ คือเซตเดียวกัน

(2) **การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข** เป็นการเขียนวงเล็บปีกกาล้อมด้วยตัวแปร แล้วบรรยายลักษณะพิเศษของตัวแปรนั้นโดยใช้เครื่องหมาย | เช่น

$A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $5\}$

$B = \{y \mid y$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$

$C = \{z \mid z$ เป็นสระในภาษาอังกฤษ$\}$

ใช้สัญลักษณ์ $\in$ แทนคำว่า "**เป็นสมาชิกของเซต**" หรือ "**อยู่ใน**"
และสัญลักษณ์ $\notin$ แทนคำว่า "**ไม่เป็นสมาชิกของเซต** หรือ "**ไม่อยู่ใน**"

ตัวอย่าง 1.1 $A = \{-1,0,1\}$ และ $B = \{0,\{1\}\}$

พบว่า สมาชิกของ A มี 3 ตัว คือ -1 , 0 และ 1
สมาชิกของ B มี 2 ตัว คือ 0 และ $\{1\}$

จะได้ว่า $0 \in A$ และ $\{1\} \in B$ แต่ $\{1\} \notin A$ และ $-1 \notin B$

สัญลักษณ์ย่อที่ใช้ในเซต

I	มาจาก Integer	หมายถึง จำนวนเต็ม
I^+	มาจาก Positive Integer	หมายถึง จำนวนเต็มบวก
I^-	มาจาก Negative Integer	หมายถึง จำนวนเต็มลบ
N	มาจาก Natural Number	หมายถึง จำนวนธรรมชาติ หรือ จำนวนนับ
Q	มาจาก Rational Number	หมายถึง จำนวนตรรกยะ
Q'	มาจาก Irrational Number	หมายถึง จำนวนอตรรกยะ
P	มาจาก Prime Number	หมายถึง จำนวนเฉพาะ
R	มาจาก Real Number	หมายถึง จำนวนจริง

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
   1) เซตของจำนวนคู่
   2) เซตของจำนวนคี่บวก
   3) เซตของจำนวนเต็มที่มากกว่า 80
   4) เซตของจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า 20
   5) เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีสองหลัก
   6) เซตของประเทศที่มีพรมแดนติดกับประเทศไทย
   7) เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ “น”
   8) เซตของจำนวนที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 7x - 18 = 0$
   9) เซตของจำนวนเต็มลบที่มากกว่า -100

2. จงบอกจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้
   1) A = $\{1234\}$
   2) B = $\{a, b, c, de, f, gh, ijk\}$
   3) C = $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 10 และ 20$\}$
   4) D = $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกและน้อยกว่า 0$\}$

3. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
   1) A = $\{1,3,5\}$
   2) A = $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
   3) A = $\{1,4,9,16,25,36,49,\ldots\}$
   4) A = $\{10,20,30,\ldots\}$
   5) A = {ตะวันออก, ตะวันตก, เหนือ, ใต้}

1.2 เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe)

บทนิยาม 1.1 :

เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตใดเซตหนึ่งที่กำหนดขึ้นเพื่อว่าเซตทุกเซตที่เราสนใจ เป็นส่วนหนึ่งของเซตนี้ทั้งสิ้น เขียนแทนด้วย U

โดยทั่วไปการเขียนเซตจะต้องระบุเอกเอกภพสัมพัทธ์เสมอ **ยกเว้น** การกล่าวถึงเซตของจำนวน ถ้าไม่ได้ระบุเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1.2 ให้ U เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

$A = \{x \mid x$ หารด้วย 3 ลงตัว$\}$

หมายความว่า A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 3 ลงตัว

นั่นคือ $A = \{3,6,9,\ldots\}$

1.3 ชนิดของเซต

(1) เซตว่าง (Empty Set หรือ Null Set)

บทนิยาม 1.2 :
เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก เขียนแทนด้วย $\{ \ \}$ หรือ ϕ

ตัวอย่าง 1.3 $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนจริง และ $x+1=x\}$ จะได้ $A = \phi$

$B = \{y \mid y$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $0\}$ จะได้ $B = \phi$

$C = \{x \mid x \in I$ และ $x^2 = -9\}$ จะได้ $C = \phi$

(2) เซตจำกัด (Finite Set)

บทนิยาม 1.3 :
เซตจำกัด คือ เซตที่บอกจำนวนสมาชิกที่ไม่ซ้ำกันในเซตได้

ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้วจำนวนสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย n(A)

ตัวอย่าง 1.4 $A = \{1,2,3,...,10\}$ จะได้ $n(A) = 10$

$B = \{y \mid y$ เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์$\}$ จะได้ $n(B) = 7$

$C = \{x \in I \mid x^2 = 9\}$ จะได้ $n(C) = 2$

$D = \{x \in N \mid x < 0\}$ จะได้ $n(C) = 0$

ข้อสังเกต เพราะว่าเซตว่างคือเซตที่ไม่มีสมาชิก ทำให้ได้ว่า $n(\phi) = 0$
ดังนั้น **<u>เซตว่างเป็นเซตจำกัด</u>**

(3) เซตอนันต์ (Infinite Set)

บทนิยาม 1.4 :

เซตอนันต์ คือ เซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกที่ไม่ซ้ำกันในเซตได้
นั่นคือ เซตอนันต์คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

ตัวอย่าง 1.5 $A = \{2,4,6,...\}$

$B = \{y \mid y \in R\}$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนตรรกยะ$\}$

$D = \{x \in N \mid x$ เป็นจำนวนที่ 5 หารลงตัว$\}$

(4) เซตที่เท่ากัน (Equal Sets หรือ Identical Sets)

บทนิยาม 1.5 :

เซตที่เท่ากัน คือ เซตสองเซตที่มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว
ถ้าเซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย A = B

ตัวอย่าง 1.6 $A = \{2,4,6,8\}$

$B = \{y \mid y$ เป็นจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า 10$\}$

$\therefore A = B$

ตัวอย่าง 1.7 $C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 10$\}$

$D = \{x \in I \mid 0 < x < 10\}$

$\therefore C = D$

ตัวอย่าง 1.8 $E = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$

$F = \{-1,0,1\}$

$\therefore E \neq F$

(5) เซตเทียบเท่ากัน (Equivalent Sets)

บทนิยาม 1.6 :
เซตเทียบเท่ากัน คือ เซตสองเซตที่มีสมาชิกเท่ากัน สามารถจับคู่กันแบบ 1 : 1 ได้

ตัวอย่าง 1.9 $A = \{2,4,6,8\}$
$B = \{a,b,c,d\}$

$\therefore$ A เทียบเท่า B แต่ $A \neq B$

แบบฝึกหัด 1.3

1. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง
   1) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 4 และ 5$\}$
   2) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 10 และน้อยกว่า 11$\}$
   3) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 5 และน้อยกว่า 15$\}$
   4) เซตของจำนวนเต็มบวกระหว่าง 5 และ 6
   5) เซตของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $25x^2 - 4 = 0$
   6) เซตของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $10x = 10$

2. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตใดเป็นเซตอนันต์
   1) $A = \{1,2,3,\ldots,200\}$
   2) $B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$
   3) $C = \left\{x \mid x = \frac{1}{n}\right.$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับ$\left.\right\}$
   4) $D = \left\{x \mid x = \frac{1}{n}\right.$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 1,000$\left.\right\}$
   5) $E = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 5 ลงตัว$\}$
   6) $F = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 5 ลงตัว และน้อยกว่า 500$\}$
   7) $G = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 10 $\}$

8) H = $\{x \mid x$ เป็นจำนวนประชากรในจังหวัดบุรีรัมย์ขณะที่นักเรียนทำโจทย์นี้$\}$

9) I = $\{x \mid x$ เป็นจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง$\}$

10) J = $\{x \mid x + 10 = x\}$

3. เซตในแต่ละข้อย่อยต่อไปนี้ มีเซตใดบ้างที่เท่ากัน

1) A = $\{x \mid x$ แทนพยัญชนะในคำว่า "กรรมการ"$\}$

B = $\{x \mid x$ แทนพยัญชนะในคำว่า "มรรคา"$\}$

C = $\{x \mid x$ แทนพยัญชนะในคำว่า "มกราคม"$\}$

D = $\{x \mid x$ แทนพยัญชนะในคำว่า "รากไม้"$\}$

2) A = $\{7,14,21,\ldots,343\}$

B = $\{x \mid x = 7n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 50$\}$

3) A = $\left\{x \mid x = 1 - \frac{1}{n}\right.$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับ$\left.\right\}$

B = $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

4) A = $\{1,2,3,4,5\}$

B = $\{5,4,3,2,1\}$

5) A = $\{x \mid x^3 + 6x^2 + 9x = 0\}$

B = $\{x \mid x^2 + 3x = 0\}$

C = $\{-3,0\}$

D = $\{-3,0,3\}$

6) C = $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x^2 = 36\}$

D = $\{6\}$

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

1.4 เซตย่อย (Subsets)

บทนิยาม 1.7 : กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ

- A เป็น**เซตย่อย**ของ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$
- A เป็น**เซตย่อยแท้**ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

ข้อสังเกต A เป็น**ไม่เป็นเซตย่อย**ของ B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$

ตัวอย่าง 1.10 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{2,4,5\}$, $C = \{3,7\}$, $D = \{1,5,6\}$

$E = \{5\}$ และ $F = \{1,2,9\}$

เห็นว่า $A \not\subset B$, $A \not\subset C$, $A \not\subset D$, $A \not\subset E$, $A \not\subset F$

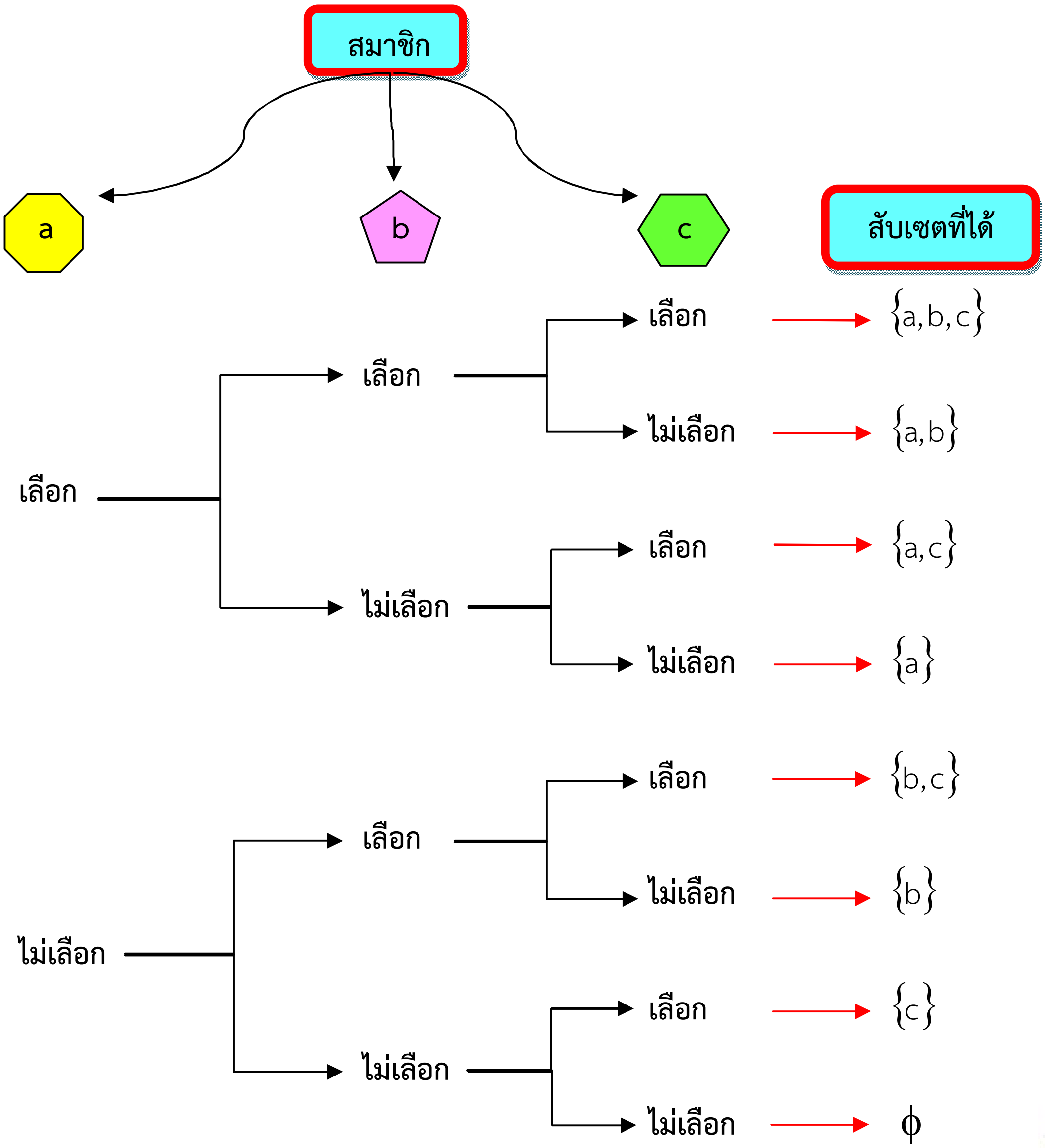
$B \subset A$, $C \not\subset A$, $D \subset A$, $E \subset A$, $F \not\subset A$

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ จงหาเซตย่อยทั้งหมดของ A

เซตย่อยทั้งหมดของ A ประกอบด้วย

1. $\{1\}$
2. $\{2\}$
3. $\{3\}$
4. $\{1,2\}$
5. $\{1,3\}$
6. $\{2,3\}$
7. $\{1,2,3\}$
8. ϕ

เงื่อนไขในการสร้างเซตย่อยของ A นั้นขึ้นอยู่กับสมาชิกแต่ละตัวใน A ว่าอาจถูก**เลือก**หรือ**ไม่เลือก**มาสร้างเซตย่อย (ซึ่งแต่ละตัวมีได้ 2 วิธีเหมือนกัน คือ **เลือก – ไม่เลือก**) เพื่อให้เห็นภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้น พิจารณาการสร้างแผนภาพต้นไม้ในการสร้างเซตย่อยของ A = $\{a,b,c\}$ ดังนี้



จากกฎการนับเบื้องต้นจะได้ว่า

จำนวนเซตย่อยทั้งหมดของ A = จำนวนวิธี<u>เลือก</u>หรือ<u>ไม่เลือก</u>สมาชิกจาก $\{a,b,c\}$

$= 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ เซตย่อย

ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว แล้ว

1. จำนวนเซตย่อยทั้งหมดของ A เท่ากับ 2^n เซตย่อย
2. จำนวนเซตย่อยแท้ทั้งหมดของ A เท่ากับ 2^n-1 เซตย่อย

สมบัติสำคัญของเซตย่อย

กำหนด A , B และ C เป็นเซตใดๆ

1. เซตว่าง เป็นเซตย่อยของทุกเซต นั่นคือ $\phi \subset A$
2. เซตทุกเซต เป็นเซตย่อยของตัวเอง นั่นคือ $A \subset A$
3. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
4. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
5. ถ้า $A \subset B$ และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว A เป็นเซตจำกัด
6. ถ้า $A \subset B$ และ B เป็นเซตอนันต์ แล้ว A เป็นเซตอนันต์
7. ถ้า $A \neq \varnothing$ แล้วจะหาเซตย่อยแท้ของ A ได้เสมอ

แบบฝึกหัด 1.4

1. ให้ A = $\{1,\{2,3\},2\}$ จงพิจารณาว่าข้อความข้างล่างนี้ถูกหรือผิด

   1) $\{2,3\} \subset A$ 2) $\{2,3\} \in A$

   3) $\{\{2,3\}\} \subset A$ 4) $3 \in A$

   5) $\{3\} \in A$ 6) $\{3\} \subset A$

2. จงหาเซตย่อยของเซตต่อไปนี้

   1) $\{1\}$ 2) $\{1,2\}$

   3) $\{-1,0,1\}$ 4) ϕ

   5) $\{3,\{5\}\}$ 6) $\{\{5\}\}$

3. ถ้า $\{1,2,3,4\}$ จงหาเซตย่อยทั้งหมดของ A ที่มีสมาชิก 1 ตัวและ 2 ตัวตามลำดับ

$\wp\ \wp\ \wp\ \wp\ \wp\ \wp\ \wp\ \wp\ \wp\ \wp$

1.5 เซตกำลัง (Power Set)

บทนิยาม 1.8 :

กำหนด A เป็นเซตใดๆ **เซตกำลังของ A** เขียนแทนด้วย P(A)

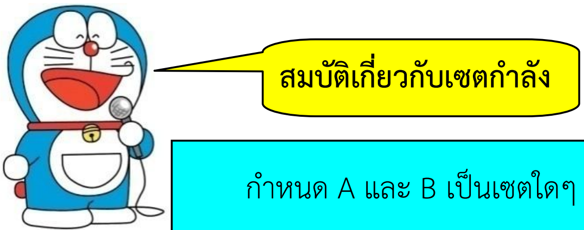
คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นเซตย่อยทั้งหมดของ A นั่นคือ

$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

ตัวอย่าง 1.12 กำหนดให้ $A = \{3,9\}$ จงหา P(A)

เซตย่อยทั้งหมดของ A คือ $\{3\}, \{9\}, \{3,9\}$ และ ϕ

$P(A) = \{\{3\}, \{9\}, \{3,9\}, \phi\}$



กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ

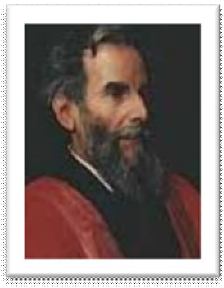
1. $A \in P(A)$
2. $P(A) \neq \phi$
3. $\phi \in P(A)$ และ $\phi \subset P(A)$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
5. ถ้า $P(A) \subset P(B)$ แล้ว $A \subset B$
6. ถ้า A มีสมาชิก n ตัว แล้ว จำนวนสมาชิกของ P(A) คือ 2^n

แบบฝึกหัด 1.5

จงหาเซตกำลังของแต่ละเซตต่อไปนี้

1. $\{5\}$
2. $\{0,2\}$
3. $\{-1,0,1\}$
4. $\{x,y,z\}$
5. $\{\phi\}$
6. ϕ

1.6 แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler Diagram)

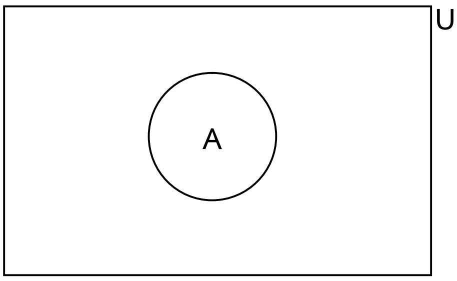


จอห์น เวนน์ (John venn)

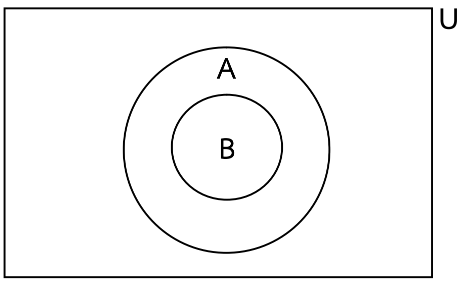
เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhaed Euler)

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ คือ ภาพแทนเซต เพื่อช่วยให้มองเห็นภาพเกี่ยวกับเซตชัดเจนขึ้น โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือรูปปิดใดๆ แทนเอกภพสัมพัทธ์(U) และวงกลมหรือวงรี แทนเซต ซึ่งนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อ จอห์น เวนน์ (John venn) และนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ชื่อ เลออน ฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhaed Euler) เป็นผู้ริเริ่มเขียนแผนภาพแทนเซต

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เป็นวิธีแสดงความสัมพันธ์ของเซต พร้อมเขียนชื่อกำกับไว้



รูป 1.1



รูป 1.2

รูป 1.1 แสดงว่า A เป็นเซตย่อยของ U

รูป 1.2 แสดงว่า A และ B ต่างก็เป็นเซตย่อยของ U

รูป 1.2 แสดงว่า $B \subset A$

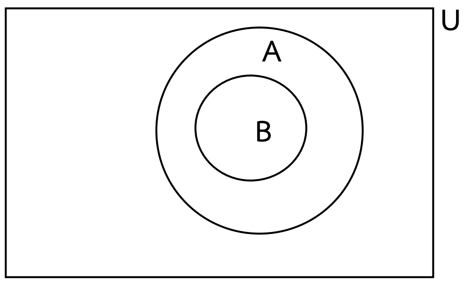
ตัวอย่าง 1.13 จงเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ แสดงความสัมพันธ์ต่อไปนี้

U = $\{x \mid x$ เป็นนักเรียนโรงเรียนกระสังพิทยาคม$\}$

A = $\{y \mid y$ เป็นนักเรียนชั้น ม.4$\}$

B = $\{x \mid x$ เป็นนักเรียนชั้น ม.4 / 2$\}$

จะได้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ดังภาพข้างล่างนี้

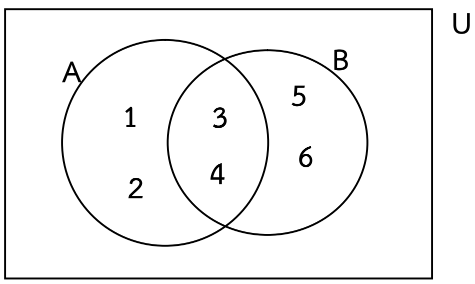


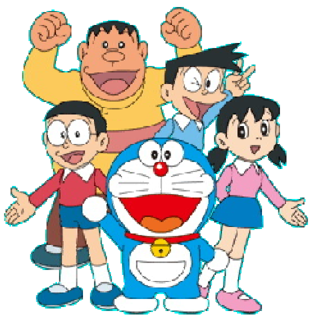
ตัวอย่าง 1.14 จงเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เมื่อกำหนดให้

A = $\{1,2,3,4\}$

B = $\{3,4,5,6\}$

จะได้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ดังภาพข้างล่างนี้





แบบฝึกหัด 1.6

จงเขียนแผนภาพแทนเซตต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนนับ

1. A = $\{1,2,3,...,10\}$

   B = $\{1,3,5,7,9\}$

2. A = $\{1,2,3,...,10\}$

   B = $\{1,3,5,7,9\}$

   C = $\{1,3,5\}$

3. A = $\{1,2,3,...,10\}$

   B = $\{1,3,5\}$

   C = $\{2,4,6\}$

4. A = $\{1,2,3,4,5\}$

   B = $\{2,4,6,8\}$

   C = $\{1,2,3,4,5,6,8\}$

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘