บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

Complex Numbers

1.1 บทนำ (Introduction)

ในช่วงต้นทศวรรษที่ 16 นักคณิตศาสตร์ชื่อ Geronimo Cardano ได้พยายามแก้ปัญหาง่าย ๆ ทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่สามารถหาคำตอบนั้นได้ นั่นคือ สมการ

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

จากการหาคำตอบ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

พบว่า $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$ ซึ่งเป็นปัญหารากที่สองของ**จำนวนจริงลบ** จากการศึกษาและพัฒนาเกือบ 200 ปีในศตวรรษที่ 18 นักคณิตศาสตร์ Leonard Euler ได้นิยามจำนวนจินตภาพ (Imaginary) ซึ่งมีบทบาทมากในช่วงนั้น เช่น

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ต่อมาได้มีการศึกษาและวิเคราะห์กันอย่างมากในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน (Complex number) และมีการนำมาประยุกต์ใช้ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ เช่น

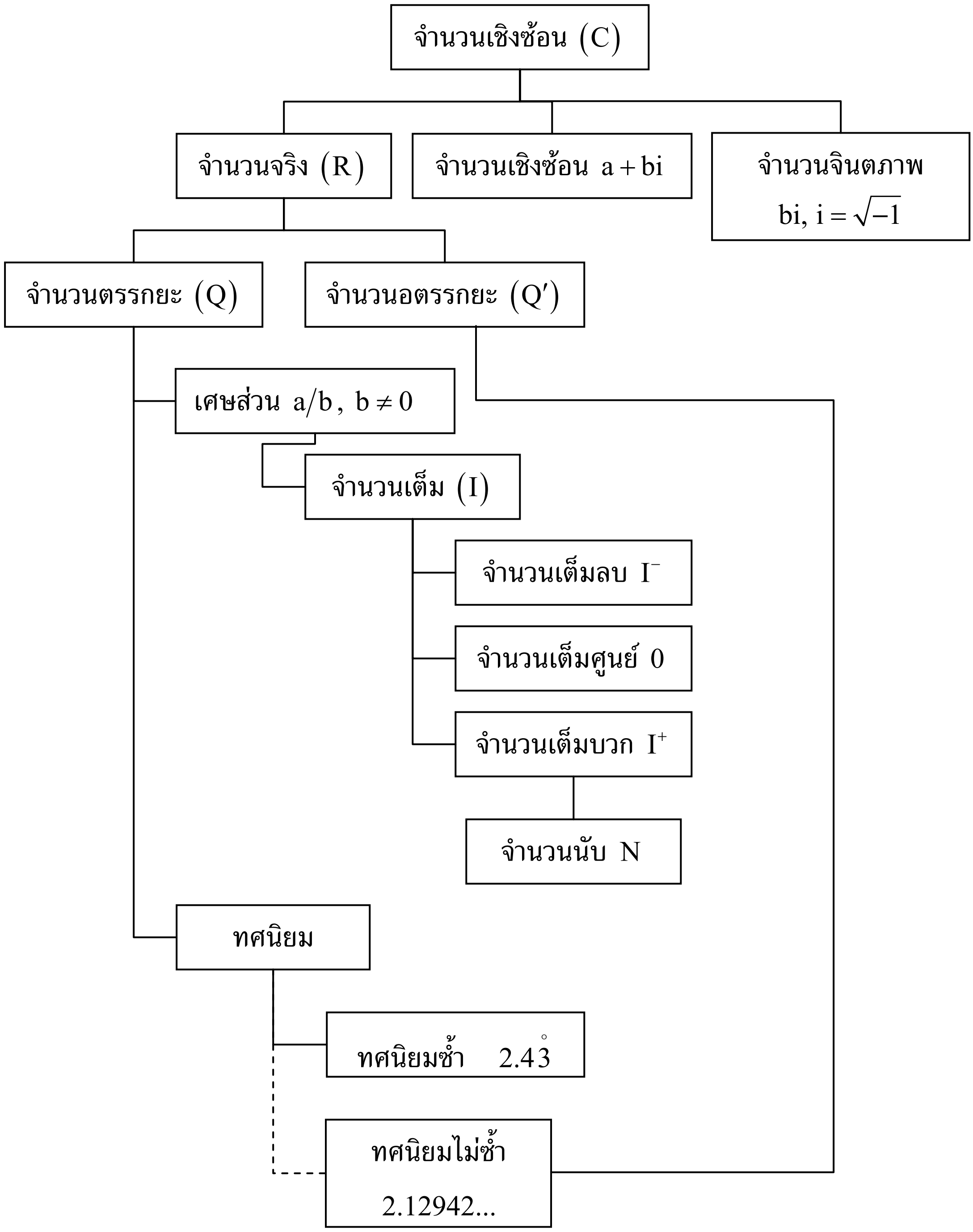
- Head conduction
- Hydrodynamics
- Electrostatics

นอกจากนี้ยังสามารถแก้ปัญหาทางแคลคูลัส เช่นการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

	ปัจจุบันพบว่า การคิดเชิงวิเคราะห์ และการคำนวณที่แม่นยำสำหรับปัญหาที่มีความยุ่งยากจำเป็นอาศัยพื้นฐานของการวิเคราะห์เชิงซ้อน (complex analysis) เพื่อให้แสดงผลลัพธ์ได้อย่างสมบูรณ์และมีความหมายมากขึ้น

แสดงแผนภาพของจำนวนเชิงซ้อน



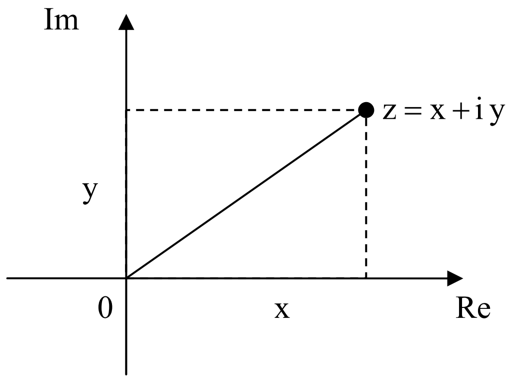
1.2 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

นิยาม 1.1

จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปของ $z = x + iy$ โดยที่ x, y เป็นจำนวนจริงและ i เป็นจำนวนจินตภาพซึ่ง $i^2 = -1$ จะเรียก z ว่าจำนวนเชิงซ้อน (Complex number)

เช่น จำนวนเชิงซ้อน $z = 2 + 3i$, $z = 1 - 2i$ และ $z = 3 - i$

นอกจากนี้สามารถเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้



รูป 1.1

ข้อสังเกต

1. จำนวน i $(i^2 = -1)$ เรียกว่าเป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary)
2. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ จะเรียก

x ว่า**ส่วนจริง** เขียนแทนด้วย $x = \mathrm{Re}(z)$

และ y เรียกว่า**ส่วนจินตภาพ** เขียนแทนด้วย $y = \mathrm{Im}(z)$

เช่น ถ้า $z = 2 - 3i$ จะได้ว่า $\mathrm{Re}(z) = 2$ และ $\mathrm{Im}(z) = -3$

ตัวอย่าง 1.1

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^2 + 1 = 0$
2. $2x^2 + x + 3 = 0$

วิธีทำ

1. สมการ $x^2 + 1 = 0$ (1)

$$x^2 = -1$$
$$x_1 = \sqrt{-1} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{-1}$$

	หรือเขียนอยู่ในรูปจำนวนจินตภาพ i $$x_1 = i \ , \ x_2 = -i$$ ตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่โดยแทนค่า $x_1 = i$ ในสมการ (1) $$x^2 + 1 = (i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$ และแทนค่า $x_2 = -i$ ในสมการ (1) จะได้ว่า $$x^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$ 2. สมการ $\qquad 2x^2 + x + 3 = 0 \qquad$ (2) ใช้สูตรหาคำตอบสมการกำลังสอง $$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{-23}}{4} \\ &= \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4} i \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4(2)(3)}}{4} \\ &= \frac{-1}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4} i \end{aligned}$$ ตรวจสอบคำตอบโดยแทนค่า x_1 ในสมการ (2) จะได้ว่า $$\begin{aligned} &2\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4} i\right)^2 + \left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4} i\right) + 3 \\ &= 2\left(\frac{1}{16} - \frac{i\sqrt{23}}{8} - \frac{23}{16}\right) - \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{23}}{4} + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$ และแทนค่า x_2 ในสมการ (2) จะได้ว่า

	$2\left(\frac{-1}{4}-\frac{i\sqrt{23}}{4}\right)^2+\left(\frac{-1}{4}-\frac{i\sqrt{23}}{4}\right)+3$ $=2\left(\frac{1}{16}+\frac{i\sqrt{23}}{8}-\frac{23}{16}\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{23}}{4}\right)+3$ $=0$ ◙

1.3 คุณสมบัติของจำนวนจินตภาพ (Properties of Imaginary)

1. จำนวนจินตภาพ i ซึ่งนิยามจาก $i^2 = -1$ หรือ $i = \sqrt{-1}$
บางครั้งการใช้สัญลักษณ์ที่ไม่ชัดเจนจะทำให้การวิเคราะห์ผิดพลาด เช่น

$$\begin{aligned} -1 &= i^2 \\ &= i \cdot i \\ &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

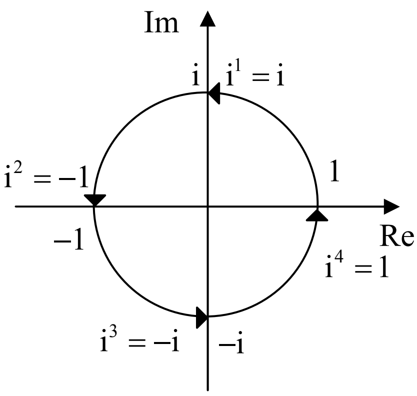
จะได้ว่า $\quad -1 = 1 \quad$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

เพราะว่า $\quad \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}, \quad x, y \geq 0$

2. การยกกำลังจำนวนจินตภาพ $i = \sqrt{-1}$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้

$$\boxed{\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}}$$

หรือ



รูป 1.2

กล่าวคือ i^n จะมีการเวียนซ้ำเมื่อครบ 4 ตัว ดังนั้น นำ 4 หาร n จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

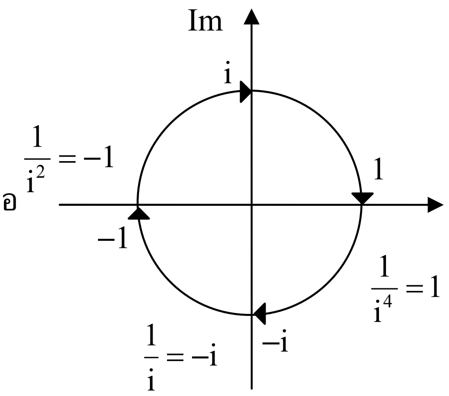
$$i^n = \begin{cases} i & \text{เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ } 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ } 2 \\ -i & \text{เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ } 3 \\ 1 & \text{เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ } 0 \end{cases}$$

สรุปได้ว่า

1. $i+i^2+i^3+i^4=0$
2. $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4=-1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{i}=-i \\ \frac{1}{i^2}=-1 \\ \frac{1}{i^3}=i \\ \frac{1}{i^4}=1 \end{array}}$$

หรือ



รูป 1.3

สรุปได้ว่า

1. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=0$
2. $\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{i^3}\cdot\frac{1}{i^4}=-1$

ตัวอย่าง 1.2

จงหาค่า

1. $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{2003}$
2. $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdots i^{2547}$
3. $i-i^2+i^3-i^4+\cdots+i^{943}$
4. $\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{21}{i^{21}}$

วิธีทำ

1. ให้หาค่าของผลบวกของแต่ละชุด ชุดละ 4 พจน์
   และ $i+i^2+i^3+i^4=i^5+i^6+i^7+i^8=\cdots=0$

	$i+i^2+i^3+i^4+i^5+\cdots+i^{2003}$ $=\left(i+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^5+i^6+i^7+i^8\right)+\cdots+\left(i^{2001}+i^{2002}+i^{2003}\right)$ $=\ 0+0+0...+\left(i^{2001}+i^{2002}+i^{2003}\right)$ $=\left(i^{2001}+i^{2002}+i^{2003}\right)$ และ นำ 4 หาร 2001,2002, 2003 ได้ ผลลัพธ์ 636 และเหลือเศษ 1,2,3 ตามลำดับ ดังนั้น $i+i^2+i^3+i^4+i^5+\cdots+i^{2003}=i^{2001}+i^{2002}+i^{2003}$ $=i+i^2+i^3$ $=-1$ 2. เนื่องจาก $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4=-1$ และ นำ 4 หาร 2545,2546,2547 จะเหลือเศษ 1,2,3 ตามลำดับ ดังนั้น $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\ldots i^{2547}=\left(i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\right)\left(i^5\cdot i^6\cdot i^7\cdot i^8\right)\cdots\left(i^{2545}\cdot i^{2546}\cdot i^{2547}\right)$ $=\underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{\text{636 terms}}\left(i\cdot i^2\cdot i^3\right)$ $=-1$ 3. เนื่องจาก $i-i^2+i^3-i^4=i+1-i-1=0$ นำ 4 หาร 941,942,943 จะเหลือเศษ 1,2,3 ตามลำดับ ดังนั้น $i-i^2+i^3-i^4+i^5-i^6+i^7-i^8+\cdots+i^{943}$ $=\left(i-i^2+i^3-i^4\right)+\left(i^5-i^6+i^7-i^8\right)+$ $\cdots+\left(i^{941}-i^{942}+i^{943}\right)$ $=0+0+\cdots+\left(i-i^2+i^3\right)$ $=1$ 4. เนื่องจาก $\frac{1}{i}=-i,\frac{1}{i^2}=-1,\frac{1}{i^3}=i,\frac{1}{i^4}=1$ ดังนั้น $\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{21}{i^{21}}=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)\cdots+\left(\frac{21}{i^{21}}\right)$

$$= (-i - 2 + 3i + 4) + (-5i - 6 + 7i + 8) + \cdots + (-21i)$$

$$= \underbrace{(2 - 2i) + (2 - 2i) + \cdots +}_{5 \text{ terms}} (-21i)$$

$$= 5(2 - 2i) - 21i = 10 - 11i$$

นิยาม 1.2

จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

เช่น ถ้า $x + iy = 0$ จะได้ $x = 0$ และ $y = 0$

ตัวอย่าง 1.3

จงหาค่า x , y จากสมการเชิงซ้อน

$$x + iy = \frac{2}{i} + \frac{4}{i^2} + \frac{6}{i^3} + \frac{8}{i^4}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{i} = -i, \frac{1}{i^2} = -1, \frac{1}{i^3} = i, \frac{1}{i^4} = 1$ นั่นคือ

$$x + iy = \frac{2}{i} + \frac{4}{i^2} + \frac{6}{i^3} + \frac{8}{i^4}$$

$$= -2i - 4 + 6i + 8$$

$$x + iy = 4 + 4i$$

จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

ส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ

จะได้ว่า $x = -12$ และ $y = 4$

1.4 การดำเนินการเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน (Fundamental operation with complex numbers)

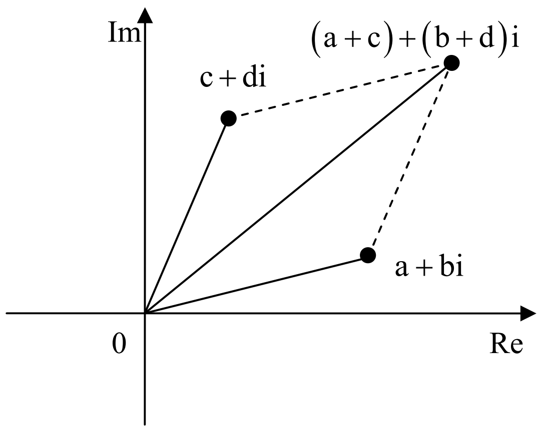
ในการดำเนินการเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อนในที่นี้หมายถึงการบวก ลบ คูณ หาร ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เนื่องจาก a และ b เป็นจำนวนจริง ดังนั้นการดำเนินการนี้สามารถนำคุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริงมาใช้ได้ดังนี้

ถ้าให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

1. **การบวก** (Addition)

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \quad \text{หรือ} \quad \boxed{\begin{array}{r} a+bi \\ \underline{c+di}\ {}^{+} \\ (a+c)+(b+d)i \end{array}}$$

เช่น $(2+3i)+(4+2i) \Rightarrow \begin{array}{r} 2+3i \\ \underline{4+2i}\ {}^{+} \\ 6+5i \end{array}$ และกราฟของการบวกดังรูป 1.4

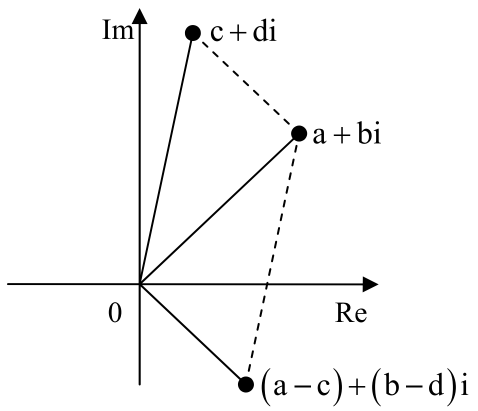


รูป 1.4

2. **การลบ** (Subtraction)

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \quad \text{หรือ} \quad \boxed{\begin{array}{r} a+bi \\ \underline{c+di}\ {}^{-} \\ (a-c)+(b-d)i \end{array}}$$

เช่น $(2+4i)-(1+3i) \Rightarrow \begin{array}{r} 2+4i \\ \underline{1+3i}\ {}^{-} \\ 1+\ i \end{array}$ และกราฟของการลบดังรูป 1.5



รูป 1.5

3. **การคูณ** (Multiplication)

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i, \quad i^2=-1$$

นั่นคือ $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

หรือ

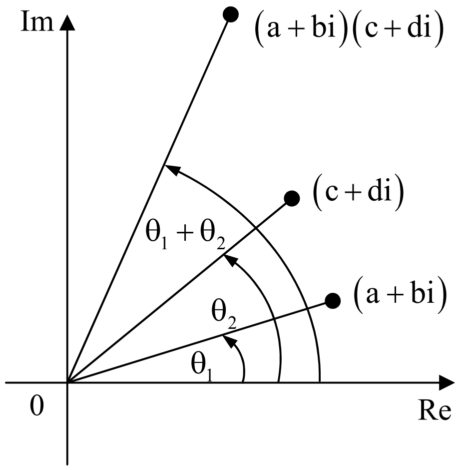
$$\begin{array}{r} a+bi \\ \underline{c+di} \\ (ac-bd)+(ad+bc)i \end{array} \times$$

นั่นคือ $\boxed{\text{คูณแนวดิ่ง}} \quad \boxed{\text{คูณแนวทแยง}}\, i$

เช่น $(3+2i)(1-3i) \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 3+2i \\ \underline{1-3i} \\ (3+6)+(-9+2)i \\ = 9-7i \end{array} \times$$

และกราฟของการคูณสามารถเขียนได้รูป 1.6



รูป 1.6

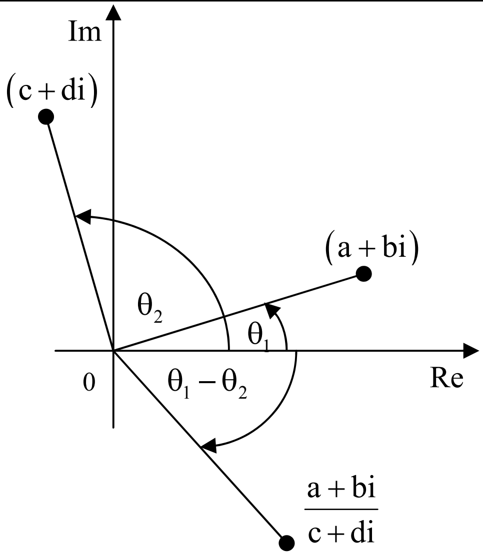
4. **การหาร** (Division)

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}\Rightarrow \begin{array}{c} a+bi \\ \underline{c-di}\times \\ \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \end{array}$$

เช่น $$\frac{2+i}{3+2i}\Rightarrow \begin{array}{c} 2+\ i \\ \underline{3-2i}\times \\ \dfrac{(6+2)+(-4+3)i}{3^2+2^2}=\dfrac{8}{13}-\dfrac{i}{13} \end{array}$$

และกราฟของการหารสามารถเขียนได้ดังรูป 1.7



รูป 1.7

ตัวอย่าง 1.4

กำหนด $z_1 = 2+4i$, $z_2 = -3+8i$ จงหา $z_1 + z_2$ และ $z_1 z_2$

วิธีทำ การบวกจำนวนเชิงซ้อนคำนวณได้โดยนำส่วนจริง บวกกับส่วนจริงและส่วนจินตภาพ บวกกับส่วนจินตภาพ

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2+4i)+(-3+8i) \\ &= (2-3)+(4+8)i \\ &= -1+12i \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2+4i)(-3+8i) \\ &= -6+16i-12i+32i^2 \\ &= -38+4i \text{ เพราะ } i^2 = -1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.5

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

1. $(a+bi)+(-a+bi)$
2. $(3+2i)+(3-4i)$
3. $(3+2i)-(6-2i)+(4+2i)$
4. $(3-2i)(2+5i)+(3-2i)(8-5i)$
5. $(2-i)(4+3i)\cdot(2+3i)$

วิธีทำ ใช้คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $(a+bi)+(-a+bi)=bi+bi=2bi$

2. $(3+2i)+(3-4i)=6-2i$

3. $(3+2i)-(6-2i)+(4+2i)$
$$=3+2i-6+2i+4+2i$$
$$=1+6i$$

4. $(3-2i)(2+5i)+(3-2i)(8-5i)$
$$=(16+11i)+(14-31i)$$
$$=30-20i$$

5. $(2-i)(4+3i)(2+3i)$
$$=(11+2i)(2+3i)$$
$$=16+37i$$

◙

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z_1=a_1+b_1i$ และ $z_2=a_2+b_2i$, $z_2\neq 0$ จะมีจำนวนเชิงซ้อน z เพียงตัวเดียวซึ่ง $zz_2=z_1$ ดังนั้นการหารจำนวนเชิงซ้อน z_1 ด้วย z_2 เขียนแทนด้วย $z=\frac{z_1}{z_2}$

ตัวอย่าง 1.6

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้อยู่ในรูป $a+bi$

1. $\frac{3-2i}{4+3i}$
2. $\frac{2-2i}{7+i}+\frac{3+4i}{2-3i}$

วิธีทำ ใช้คุณสมบัติ $i^2=-1$ ในการตอบคำถามต่อไปนี้

1. $\frac{3-2i}{4+3i}=\frac{(3-2i)(4-3i)}{4^2+3^2}$
$$=\frac{6}{25}-\frac{17i}{25}$$

2. $\frac{2-2i}{7+i}+\frac{3+4i}{2-3i}=\frac{(2-2i)(7-i)}{7^2+1^2}+\frac{(3+4i)(2+3i)}{2^2+3^2}$
$$=\frac{12-16i}{50}+\frac{(-6+14i)}{13}$$

$$=\left(\frac{12}{50}-\frac{6}{13}\right)+\left(\frac{14}{13}-\frac{16}{50}\right)i$$

◘

ตัวอย่าง 1.7

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้อยู่ในรูป $a+bi$

1. $i^4-3i^3+4i^2+2i-6$
2. $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^4$

วิธีทำ ใช้คุณสมบัติ $i^2=-1$ ในการตอบคำถามต่อไปนี้

1. $$\begin{aligned} i^4-3i^3+4i^2+2i-6] &= i^2i^2-3i^2i+4i^2+2i-6 \\ &=(-1)(-1)-3(-1)i+4(-1)+2i-6 \\ &=-9+5i \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \left(\frac{2i}{1+i}\right)^4=\left(\frac{2i(1-i)}{1^2+1^2}\right)^4 &=\left(\frac{2+2i}{2}\right)^4 \\ &=(1+i)^4 \\ &=\left((1+i)^2\right)^2 \\ &=(2i)^2 \\ &=-4 \end{aligned}$$

◘

ตัวอย่าง 1.8

กำหนดให้ $i^n=-i$ จงแสดงว่า $n=4m-1$ เมื่อ n , m เป็นจำนวนเต็ม

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} i^4=1 &\rightarrow i^{4m}=1^m=1 \\ &\rightarrow i^{4m}\cdot i^{-1}=i^{-1} \\ &\rightarrow i^{(4m-1)}=\frac{1}{i}=-i \end{aligned}$$

ดังนั้น $n=4m-1$ สำหรับ n , m เป็นจำนวนเต็ม

◘

ตัวอย่าง 1.9

จงหาจำนวนจริง x และ y สอดคล้องกับสมการ $4x+2ixy-iy=5+3i$

วิธีทำ จากสมการ

$$4x+(2xy-y)i=5+3i$$

จากคุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

$$4x=5\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

และ

$$2xy-y=3\Rightarrow 2\left(\frac{5}{4}\right)y-y=3$$
$$\Rightarrow\frac{3}{2}y=3\Rightarrow y=2$$

ดังนั้น

$$x=\frac{5}{4} \text{ และ } y=2$$

ตัวอย่าง 1.10 จงแสดงว่าสมการไลบ์นิส (Leibnitz) เป็นจริง

$$x^4+a^4=\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$

วิธีทำ จากการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

$$\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)=x^2-ax\sqrt{-\sqrt{-1}}+ax\sqrt{-\sqrt{-1}}+a^2\sqrt{-1}$$
$$=x^2+a^2i$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)=x^2-a^2i$$

ดังนั้น

$$\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$
$$=\left(x^2+a^2i\right)\left(x^2-a^2i\right)$$
$$=x^4+a^2ix^2-a^2ix^2-a^4i^2$$
$$=x^4+a^4$$

นั่นคือ

$$x^4 + a^4 = \left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$

◘

ตัวอย่าง 1.11 จงแสดงว่าผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $z_1z_2 = 0$ ก็ต่อเมื่อจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = 0$

วิธีทำ ให้ $z_1 = a_1 + b_1 i$ และ $z_2 = a_2 + b_2 i$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 0 \\ 0 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$

และ $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$

ยกกำลังทั้ง 2 เทอมแล้วนำมาบวกกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 &= 0 \\ (a_1a_2)^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + (b_1b_2)^2 & \\ + (a_1b_2)^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + (a_2b_1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2(a_2^2 + b_2)^2 + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) &= 0 \\ (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 = 0 \ &\text{หรือ} \ a_2^2 + b_2^2 = 0 \\ a_1 = b_1 = 0 \ &\text{หรือ} \ a_2 = b_2 = 0 \\ z_1 = 0 \ &\text{หรือ} \ z_2 = 0 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $z_1z_2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = 0$

◘

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$z^n = z_1 z_2 \ldots z_n$$

ตัวอย่าง 1.12

ถ้าจำนวนเชิงซ้อนเขียนอยู่ในรูป

$$z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha\,, \qquad 0 < \alpha < 2\pi$$

จงแสดงว่า

$$\frac{1+z}{1-z} = i\cot\frac{\alpha}{2}$$

วิธีทำ แทนค่า $z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$ ทางซ้ายมือของสมการ และแทนค่า $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (คุณสมบัติตรีโกณ) ทางขวามือของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{1+\cos\alpha + i\,\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\,\sin\alpha} = \frac{i(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\sin\alpha\left(1+\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = i\left(1+\cos\alpha\right)\left(1-\cos\alpha - i\sin\alpha\right)$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + i\sin^2\alpha &= i - i\cos\alpha + \sin\alpha + i\cos\alpha \\
&\quad - i\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\
&= i + \sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha - i\cos^2\alpha \\
&= \sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + i\left(1-\cos^2\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$i\sin^2\alpha = i\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

หรือ $$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

จากคุณสมบัติตรีโกณ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

นั่นคือแสดงว่า $$\frac{1+z}{1-z} = i\cot\frac{\alpha}{2}$$

◘

ตัวอย่าง 1.13

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แสดงว่า

1. $\left(a^2 - i\,ab - b^2\right)\left(a + i\,b\right) = a^3 - i\,b^3 \qquad (1)$
2. $\left[\left(a^2 - b^2\right)^2 + a^2b^2\right]\left[a^2 + b^2\right] = a^6 + b^6$

วิธีทำ

1. ใช้คุณสมบัติการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned}\left(a^2 - i\;\; ab - b^2\right)\left(a + i\;\; b\right) &= a^3 - ia^2b + ab^2 + ia^2b - ab^2 - ib^3 \\ &= a^3 - ib^3\end{aligned}$$

2. เนื่องจากสมการ (1) เป็นจริงทุก ๆ ค่า $a, b \in R$ ดังนั้นแทนค่า

$$\begin{aligned} a &\to a^2 \\ b &\to -i\,b^2 \end{aligned}$$

ในสมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left[a^4 - ia^2\left(-ib^2\right) - \left(-i\,b^2\right)^2\right]\left[a^2 + i\left(-i\,b^2\right)\right] &= \left(a^2\right)^3 - i\left(-i\,b^2\right)^3 \\ \left[a^4 - a^2b^2 + b^4\right]\left(a^2 + b^2\right) &= a^6 + b^6 \\ \left[\left(a^2 + b^2\right)^2 + a^2b^2\right]\left[a^2 + b^2\right] &= a^6 + b^6\end{aligned}$$

ซึ่งตรงกับข้อ 2.

ฟิลด์ (Field)

เซต $S \neq \phi$ กับการบวกและการคูณ จะเรียกว่าเป็นฟิลด์ (Field) ถ้าการดำเนินการสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

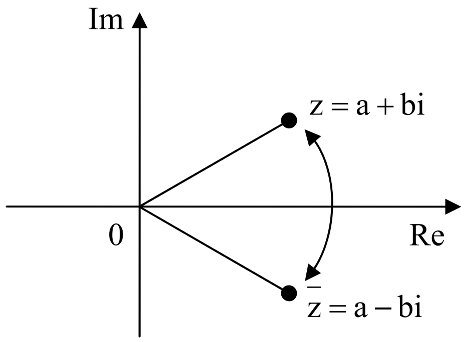
1. ถ้า $a \in S$ และ $b \in S$ จะได้ว่า $a + b \in S$ และ $ab \in S$
2. การสลับที่ : ถ้า $a \in S$ และ $b \in S$ จะได้ว่า
$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ ab &= ba \end{aligned}$$
3. การจัดหมู่ : ถ้า $a, b, c \in S$ จะได้ว่า
$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ a(bc) &= (ab)c \end{aligned}$$
4. การกระจาย : ถ้า $a, b, c \in S$ จะได้ว่า

	$a(b+c)=ab+ac$ 5. มีจำนวน $0,1 \in S$ สำหรับทุก ๆ $a \in S$ $0+a=a+0=a$ เรียก 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก $a1=1a=a$ เรียก 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ 6. ทุก ๆ $a \in S$ จะมีอินเวอร์สการบวก $-a$ ซึ่ง $(-a)+a=a+(-a)=0$ ทุก ๆ $a \neq 0 \in S$ จะมีอินเวอร์สการคูณ a^{-1} ซึ่ง $a^{-1}a=aa^{-1}=1$ จะเห็นได้ชัดเจนว่า $z=a+bi$ และเซตของจำนวนเชิงซ้อนกับการบวกและคูณจะเป็น**ฟิลด์**

1.5 จำนวนเชิงซ้อนสังยุค

นิยาม 1.2

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เรียก $\bar{z} = a - bi$ ว่า "จำนวนเชิงซ้อนสังยุค" (complex conjugate) ของ z แสดงกราฟได้ดังนี้



รูป 1.8

คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนสังยุค

ถ้า z, z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

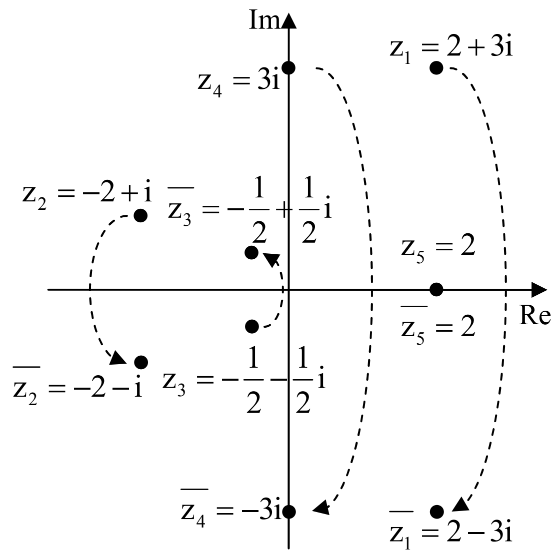
1. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนเมื่อมีการเปลี่ยนเครื่องหมายเฉพาะส่วนจินตภาพเท่านั้นจะเรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนสังยุค เขียนโดย $\bar{z}$ เช่น $z = 5 + 4i$ จะได้ว่า $\bar{z} = 5 - 4i$ และ $\bar{\bar{z}} = 5 + 4i$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
6. $\bar{\bar{z}} = z$
7. $z\bar{z} = x^2 + y^2$
8. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ และ $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

	เช่น | จำนวนเชิงซ้อน (z) | จำนวนเชิงซ้อนสังยุค $(\bar{z})$ | |---|---| | $z_1 = 2+3i$ | $\bar{z}_1 = 2-3i$ | | $z_2 = -2+i$ | $\bar{z}_2 = -2-i$ | | $z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ | $\bar{z}_3 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ | | $z_4 = 3i$ | $\bar{z}_4 = -3i$ | | $z_5 = 2$ | $\bar{z}_5 = 2$ |

เช่น

จำนวนเชิงซ้อน (z)	จำนวนเชิงซ้อนสังยุค $(\bar{z})$
$z_1 = 2+3i$	$\bar{z}_1 = 2-3i$
$z_2 = -2+i$	$\bar{z}_2 = -2-i$
$z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\bar{z}_3 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
$z_4 = 3i$	$\bar{z}_4 = -3i$
$z_5 = 2$	$\bar{z}_5 = 2$

เขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 1.9

ตัวอย่าง 1.14

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = 2+4i$, $z_2 = 3-2i$

วิธีทำ

1. จงหา

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+4i)}{(3-2i)} = \frac{(2+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= \frac{-2+16i}{3^2+2^2}$$

$$= \frac{-2+6i}{13}$$

2. จงหา

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{(2+4i)} = \frac{(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$

$$= \frac{2-4i}{2^2+4^2} = \frac{2-4i}{20}$$

$$= \frac{1-2i}{10}$$

3. จงแสดง $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

เนื่องจาก $\overline{z_1+z_2} = \overline{(2+4i)+(3-2i)}$

$$= \overline{5+2i}$$

$$= 5-2i$$

และ $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{(2+4i)} + \overline{(3-2i)}$

$$= 2-4i+3+2i$$

$$= 5-2i$$

นั่นคือ $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

4. จงหา $\mathrm{Re}(z_1)$ และ $\mathrm{Im}(z_2)$

เนื่องจาก $z_1 = 2+4i$ จะได้ $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ หรือ

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{z_1+\overline{z}_1}{2}$$

$$= \frac{(2+4i)+(2-4i)}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

และ $z_1 = 3-2i$ จะได้ $\mathrm{Im}(z_2) = -2$ หรือ

$$\mathrm{Im}(z_2) = \frac{z_2-\overline{z}_2}{2i}$$

$$= \frac{(3-2i)-(3+2i)}{2i}$$

$$= \frac{-4i}{2i} = -2$$

นิยาม 1.3

ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เขียนแทนด้วย

$$\mathrm{Re}(z) = a$$

ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนด้วย

$$\mathrm{Im}(z) = b$$

ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

ตัวอย่าง 1.15

ถ้า z_1z_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า มีจำนวนจริง α ซึ่ง $z_1 = \alpha\overline{z}_2$

วิธีทำ ให้ $z_1 = a_1 + ib_1$ และ $z_2 = a_2 + ib_2$ และ $z_1z_2 = k \neq 0$ โดยที่ $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$

พิจารณา

$$\frac{z_1}{\overline{z}_2} = \frac{z_1}{a_2 - ib_2}$$

$$= \frac{z_1(a_2 + ib_2)}{(a_2 - ib_2)(a_2 + ib_2)}$$

$$= \frac{z_1z_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$$

$$\frac{z_1}{\overline{z}_2} = \frac{k}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$$

กำหนดให้ $\dfrac{k}{a_2{}^2 + b_2{}^2} = \alpha$

ดังนั้น $\dfrac{z_1}{\overline{z}_2} = \alpha$ นั่นคือ $z_1 = \alpha\overline{z_2}$

◙

ตัวอย่าง1.16

จงหาจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 ซึ่งผลบวกเท่ากับ 5 และผลคูณเท่ากับ 9

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 ซึ่ง

$$z_1 + z_2 = 5 \qquad (1)$$

$$z_1z_2 = 9 \qquad (2)$$

นั่นคือ $z_1 = 5 - z_2$ แล้วแทนค่าใน (2)

	$$\left(5-z_2\right)z_2=9$$ $$z_2^{\ 2}-5z_2+9=0$$ จากสูตร $z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ จะได้ว่า $$z_2=\frac{5\pm\sqrt{25-36}}{2}=\frac{5}{2}\pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$ หาค่า z_1 $$z_1=5-\left(\frac{5}{2}\pm i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$ $$=\frac{5}{2}\pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$ เมื่อนำ z_1,z_2 ไปแทนค่าในสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า มี z_1 และ z_2 เป็นคำตอบเพียงชุดเดียวเท่านั้น คือ $$z_1=\frac{5}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2} \text{ และ } z_2=\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$$ ◙

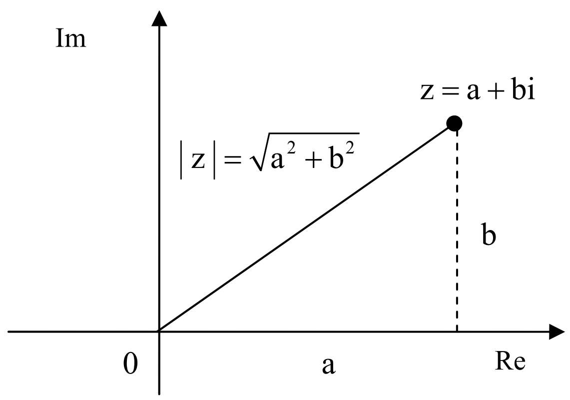
1.6 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 1.4

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute หรือ Modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เขียนแทนด้วย

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ดังรูป



รูป 1.10

นั่นคือ $|z|$ หมายถึง ระยะห่างของจำนวนเชิงซ้อน z กับจุดกำเนิดนั่นเอง

คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z, z_1 และ $z_2, \ldots, z_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $|z| = |\bar{z}|$
2. $|z|^2 = z\bar{z}$
3. $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
4. $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$
5. $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$
6. $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$
7. $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2|\ldots|z_n|$

8. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

9. $|z|$ หมายถึงการหาระยะห่างของจำนวนเชิงซ้อน z กับจุดกำเนิด

10. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

เรียกคุณสมบัตินี้ว่า Triangle Inequality ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|$$

11. ถ้ากำหนดให้ $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ จะได้ว่า

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \le |z_1 + z_2| + |-z_2|$$

$$|z_1| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$$

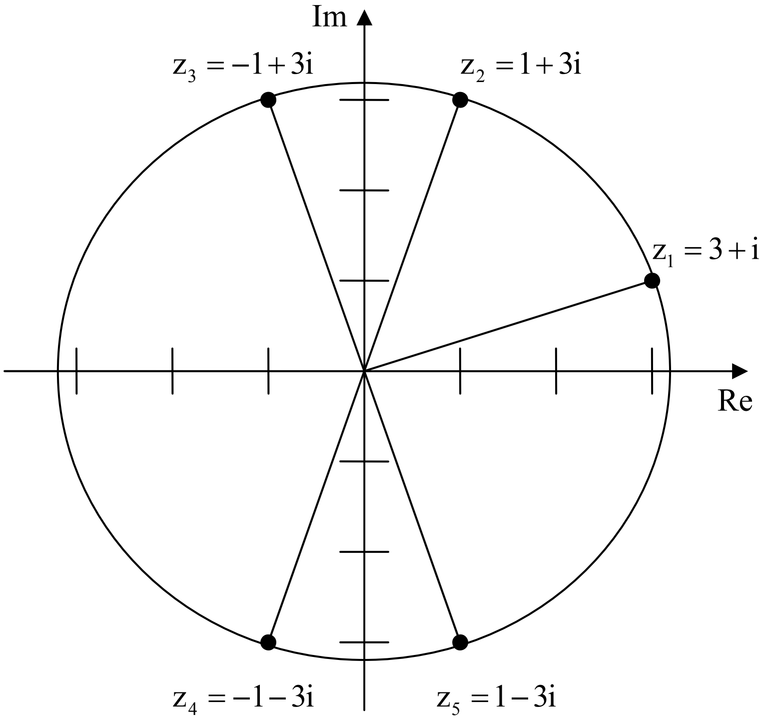
นั่นคือ $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$

ตัวอย่าง ค่าสัมบูรณ์ $|z|$

จำนวนเชิงซ้อน z	ค่าสัมบูรณ์ $\|z\|$
$z_1 = -4 + 2i$	$\|z_1\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$
$z_2 = 1 - 3i$	$\|z_2\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$
$z_3 = 3 + i$	$\|z_3\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
$z_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$\|z_4\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
$z_5 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$	$\|z_5\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

ตัวอย่าง กราฟของค่าสัมบูรณ์ $|z|$ โดยที่

$z_1 = 3 + i,\ z_2 = 1 + 3i, z_3 = 1 + 3i, z_4 = -1 - 3i, z_5 = 1 - 3i$



รูป 1.11

ตัวอย่าง 1.17	จงหาคำตอบของสมการ $\bar{z} = 2 - \dfrac{1}{z}$
	วิธีทำ จากโจทย์นำจำนวนเชิงซ้อน z คูณทั้งสองข้าง $$z\bar{z} = 2z - 1$$ $$\lvert z \rvert^2 = 2z - 1$$ $$2z = \lvert z \rvert^2 + 1$$ ให้ $z = a + bi$ นำไปแทนค่า จะได้ว่า $$2a + i2b = a^2 + b^2 + 1$$ พิจารณาส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ จะได้ว่า $$2a = a^2 + b^2 + 1$$ $$2b = 0 \rightarrow b = 0$$ เมื่อ $b = 0$ หาค่า a ได้ดังนี้ $$2a = a^2 + 1$$ $$a^2 - 2a + 1 = (a-1)(a-1) = 0$$ $$a = 1$$

ดังนั้นคำตอบคือ $z = 1 + i0 = 1$

◘

ตัวอย่าง 1.18

จงแสดงคุณสมบัติ Triangle Inequality ของจำนวนเชิงซ้อน

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

<u>**วิธีทำ**</u> ใช้คุณสมบัติ $|z|^2 = z\bar{z}$ และยกกำลังสองซ้ายมือของอสมการจะได้

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) \\ &= (z_1 + z_2)\left(\bar{z}_1 + \bar{z}_2\right) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 \end{aligned}$$

ใช้คุณสมบัติ $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ จะได้ว่า $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) + |z_2|^2 \\ &\le |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$|z_1 + z_2|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

และถอดรากที่ 2 ของอสมการ จะได้ว่า

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

◘

ข้อสังเกต

ใช้วิธีการ Mathematical Induction สามารถแสดงคุณสมบัติของอสมการ

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

ตัวอย่าง 1.19	กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า $\lvert\,\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\,\rvert \le \lvert z_1 - z_2\rvert$

วิธีทำ ใช้คุณสมบัติ $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$ และ $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \lvert z_1 - z_2\rvert^2 &= (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(\bar{z}_1 - \bar{z}_2\right) \\ &= z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 \\ &= \lvert z_1\rvert^2 - 2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) + \lvert z_2\rvert^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

ใช้คุณสมบัติ $\lvert \operatorname{Re}(z)\rvert \le \lvert z\rvert$ หรือ $-\lvert z\rvert \le \operatorname{Re}(z) \le \lvert z\rvert$

และ $\lvert z\rvert \ge -\operatorname{Re}(z) \ge -\lvert z\rvert$ จากสมการ (1)

$$\begin{aligned} \lvert z_1 - z_2\rvert^2 &= \lvert z_1\rvert^2 - 2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) + \lvert z_2\rvert^2 \\ &\ge \lvert z_1\rvert^2 - 2\lvert z_1\bar{z}_2\rvert + \lvert z_2\rvert^2 = \left(\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\right)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lvert z_1 - z_2\rvert^2 &\ge \left(\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\right)^2 \\ \lVert z_1 - z_2\rVert &\ge \lVert z_1\rvert - \lvert z_2\rVert \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lvert\,\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\,\rvert \le \lvert z_1 - z_2\rvert$ ◙

ตัวอย่าง 1.20	กำหนดให้ $z = a + ib$ จงแสดงว่า $$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \le \sqrt{2}\lvert a + ib\rvert \le \sqrt{2}\left(\lvert a\rvert + \lvert b\rvert\right)$$

วิธีทำ ขั้นแรกจะแสดงว่า

$$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \le \sqrt{2}\lvert a + ib\rvert$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างและใช้คุณสมบัติ $a^2 + b^2 = \lvert a + ib\rvert^2$ จะได้ว่า

$$\lvert a\rvert^2 + 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$$

จากคุณสมบัติ $a^2 = \lvert a\rvert^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert &\le a^2 + b^2 = \lvert a\rvert^2 + \lvert b\rvert^2 \\ 0 &\le \lvert a\rvert^2 - 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 \\ 0 &\le \left(\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\right)^2 \end{aligned}$$

	ดังนั้น $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\le\sqrt{2}\lvert a+ib\rvert$ เป็นจริง ขั้นต่อไป จะแสดงว่า $$\sqrt{2}\lvert a+ib\rvert\le\sqrt{2}\left(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\right)$$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $$\begin{aligned} a^2+b^2&\le\lvert a\rvert^2+2\lvert a\rvert\lvert b\rvert+\lvert b\rvert^2\\ \lvert a\rvert^2+\lvert b\rvert^2&\le\lvert a\rvert^2+2\lvert a\rvert\lvert b\rvert+\lvert b\rvert^2\\ 0&\le 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert\end{aligned}$$ ดังนั้น $$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\le\sqrt{2}\lvert a+ib\rvert\le\sqrt{2}\left(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\right)$$ ◘
ตัวอย่าง 1.21	จงแสดงว่า $\lvert z_1+z_2\rvert^2+\lvert z_1+\overline{z_2}\rvert^2=2\left(\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2\right)+4\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$
	วิธีทำ ใช้คุณสมบัติ $\lvert z\rvert^2=z\overline{z}$ และ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}}=z$ พิจารณาทางซ้ายมือของสมการ $$\begin{aligned}\lvert z_1+z_2\rvert^2+\lvert z_1+\overline{z}_2\rvert^2&=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)+(z_1+\overline{z}_2)\left(\overline{z_1+\overline{z}_2}\right)\\ &=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+(z_1+\overline{z}_2)(\overline{z}_1+z_2)\\ &=\lvert z_1\rvert^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\lvert z_2\rvert^2+\lvert z_1\rvert^2+z_1z_2+\overline{z}_2\overline{z}_1+\lvert z_2\rvert^2\\ &=2\lvert z_1\rvert^2+2\lvert z_2\rvert^2+z_1(z_2+\overline{z}_2)+\overline{z}_1(z_2+\overline{z}_2)\\ &=2\left(\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2\right)+(z_1+\overline{z}_1)(z_2+\overline{z}_2)\end{aligned}$$ จากคุณสมบัติ $z_1+\overline{z}_1=2\operatorname{Re}(z_1)$ และ $z_2+\overline{z}_2=2\operatorname{Re}(z_2)$ ดังนั้น $$\lvert z_1+z_2\rvert^2+\lvert z_1+\overline{z}_2\rvert^2=2\left(\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2\right)+4\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$$ ◘

1.7 อสมการของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 1.22

ถ้า $|z|<1$ จงแสดงว่า

$$|z-1|+|z+1|\le 2\sqrt{2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $|z-1|^2=(z-1)(\overline{z-1})$

และ $|z+1|^2=(z+1)(\overline{z+1})$

ยกกำลังสองทางซ้ายมือของอสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(|z-1|+|z+1|)^2 &= |z-1|^2+2|z-1||z+1|+|z+1|^2\\ &=(z-1)(\bar{z}-1)+2|(z-1)(z+1)|+(z+1)(\bar{z}+1)\\ &=z\bar{z}-z-\bar{z}+1+2|(z-1)(z+1)|+z\bar{z}+z+\bar{z}+1\\ &=2|z|^2+2|z^2-1|+2\end{aligned}$$

เนื่องจาก $|z|\le 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|z|^2+|z^2-1| &\le |z|^2+(|z|^2+|-1|)\\ &\le 1+1+1=3\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(|z-1|+|z+1|)^2 &= 2|z|^2+2|z^2-1|+2\\ &\le 2(3)+2=8\end{aligned}$$

หรือ $|z-1|+|z+1|\le 2\sqrt{2}$

◙

ตัวอย่าง 1.23

จงพิสูจน์สมการเอกลักษณ์ของลากรองจ์ (Lagrange's Identity)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2=\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2-\sum_{1\le j<k\le n}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2$$

เมื่อ z_j, w_j เป็นจำนวนเชิงซ้อน

วิธีทำ จากคุณสมบัติ $|z|^2 = z\overline{z}$ และทางขวามือของสมการ จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2\sum_{j=1}^{n}\left|w_j\right|^2-\sum_{1\le j<k\le n}\left|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}\right|^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{z}_j\sum_{j=1}^{n}w_j\overline{w}_j-\sum_{1\le j<k\le n}\left(z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}\right)\left(\overline{z}_jw_k-\overline{z}_kw_j\right)$$

$$=\left(z_1\overline{z_1}+\ldots+z_n\overline{z_n}\right)\left(w_1\overline{w_1}+\ldots+w_n\overline{w_n}\right)$$

$$-\sum_{1\le j<k\le n}\left(z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}\right)\left(\overline{z_j}w_k-\overline{z_k}w_j\right)$$

$$=\left(z_1\overline{z_1}+\ldots+z_n\overline{z_n}\right)\left(w_1\overline{w_1}+\ldots+w_n\overline{w_n}\right)$$

$$-\sum_{1\le j<k\le n}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}-\sum_{1\le j<k\le n}z_k\overline{z_k}w_j\overline{w_j}$$

$$+\sum_{1\le j<k\le n}z_j\overline{z_k}w_j\overline{w_k}+\sum_{1\le j<k\le n}z_k\overline{z_j}w_k\overline{w_j}$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}$$

$$-\sum_{1\le j<k\le n}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}-\sum_{1\le j<k\le n}z_k\overline{z_k}w_j\overline{w_j}$$

$$+\sum_{1\le j<k\le n}z_j\overline{z_k}w_j\overline{w_k}+\sum_{1\le j<k\le n}z_k\overline{z_j}w_k\overline{w_j} \qquad (1)$$

โดยคุณสมบัติของอนุกรม

$$\sum_{1\le j<k\le n}a_jb_k+\sum_{1\le j<k\le n}a_kb_j=\sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^{n}a_jb_k$$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$=\sum_{j,k=1}^{n}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}-\sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^{n}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}+\sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^{n}z_j\overline{z_k}w_j\overline{w_k}$$

$$=\sum_{j=k=1}^{n}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}+\sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^{n}z_j\overline{z_k}w_j\overline{w}_k$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j w_j}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right)}$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2$$

จะได้ว่า

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 - \sum_{1\le j<k\le n} \left|z_j \overline{w_k} - z_k \overline{w_j}\right|^2$$

◙

ตัวอย่าง 1.24	จงพิสูจน์อสมการของโคชี (Cauchy's inequality) ของจำนวนเชิงซ้อน $$\left\|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right\|^2 \le \left\|\sum_{j=1}^{n} \|z_j\|^2\right\| \left\|\sum_{j=1}^{n} \|w_j\|^2\right\|$$

วิธีทำ อสมการของโคชี เป็นอสมการที่ใช้กันมากในหลาย ๆ เนื้อหาของคณิตศาสตร์ การพิสูจน์นี้ จะอ้างอิงตัวอย่าง 1.23

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 - \sum_{1\le j<k\le n} \left|z_j \overline{w_k} - z_k \overline{w_j}\right|^2$$

เนื่องจาก เทอมสุดท้ายทางขวามือของสมการ

$$\sum_{1\le j<k\le n} \left|z_j \overline{w_k} - z_k \overline{w_j}\right|^2 \ge 0 \text{ เสมอ}$$

ดังนั้น

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right| \left|\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right| \qquad (|a|+|b| = \big||a|+|b|\big|)$$

นั่นคืออสมการโคชี นั่นเอง ◙

ตัวอย่าง 1.25	จงพิสูจน์อสมการมินโคสกี (Minkoski's inequality) ของจำนวนเชิงซ้อน $$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2}\le\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j\rvert^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert w_j\rvert^2}$$
	วิธีทำ จากคุณสมบัติ $\lvert z_j+w_j\rvert\le\lvert z_j\rvert+\lvert w_j\rvert$ พิจารณา $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2&=\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert\lvert z_j+w_j\rvert\\&\le\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert\left(\lvert z_j\rvert+\lvert w_j\rvert\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert\lvert z_j\rvert+\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert\lvert w_j\rvert \qquad (1)\end{aligned}$$ สมการ (1) ประยุกต์ใช้คุณสมบัติ Cauchy's inequality จะได้ว่า $$\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert\lvert z_j\rvert\le\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j\rvert^2\right)} \qquad (2)$$ และ $$\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert\lvert w_j\rvert\le\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert w_j\rvert^2\right)} \qquad (3)$$ สมการ (1) จะได้ว่า $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2&\le\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j\rvert^2\right)}\\&\quad+\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert w_j\rvert^2\right)}\\&=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j\rvert^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert w_j\rvert^2}\right)\end{aligned}$$ นำ $\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lvert z_j+w_j\rvert^2}$ หารทั้ง 2 ข้าง จะได้ว่า

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left| z_j + w_j \right|^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left| z_j \right|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left| w_j \right|^2}$$

นั่นคือ อสมการของ Minkoski's inequality

เพื่อความเข้าใจมากขึ้นจะพิสูจน์การประยุกต์ Cauchy's inequality ในสมการ (2),(3) จากตัวอย่าง 1.24

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j v_j\right| \le \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\left| z_j\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left| v_j\right|^2\right)}$$

และจากสมการ (2)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left| z_j + w_j\right|\left| z_j\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\left| z_j + w_j\right|\left| z_j\right|\right| \\
&\le \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\,\left|z_j + w_j\right|\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\,\left|z_j\right|\right|^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\left| z_j + w_j\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left| z_j\right|^2\right)}
\end{aligned}$$

นั่นก็คือสมการ (2)

การพิสูจน์สมการ (3) ทำในทำนองเดียวกัน

◙

1.8 โพลิโนเมียลของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 1.26

กำหนดให้ a_n , a_{n-1} , …, a_1 , a_0 เป็นจำนวนจริง และ α เป็นคำตอบของสมการโพลิโนเมียลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูป

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

จะได้ว่า $\overline{\alpha}$ จะเป็นคำตอบของสมการโพลิโนเมียล

วิธีทำ เนื่องจาก α เป็นคำตอบของสมการ ดังนั้น

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

และ

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0} = 0 \qquad (1)$$

ใช้คุณสมบัติ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ กับสมการ (1) จะได้ว่า

$$\overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = 0 \qquad (2)$$

ใช้คุณสมบัติ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ และ $\overline{x} = x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง นั่นก็คือ

$$\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \ldots, \overline{a_0} = a_0$$

จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = 0$$

ดังนั้น $\overline{\alpha}$ จะเป็นรากของสมการโพลิโนเมียล

◙

เช่น สมการโพลิโนเมียลที่สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\left(z-(2+i)\right)\left(z-(2-i)\right)(z-3)(z+2) = 0$$

คำตอบของสมการโพลิโนเมียลคือ

$$z_1 = 2+i, z_2 = 2-i, z_3 = 3, z_4 = -2$$

จะเห็นได้ว่า $z_1 = 2+i$ เป็นคำตอบของสมการ และ $\overline{z_1} = \overline{2+i} = 2-i = z_2$ ก็เป็นคำตอบของสมการด้วยเสมอ

ตัวอย่าง 1.27

ถ้าจำนวนเศษส่วน $\frac{\alpha}{\beta}$ (เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ) ที่เป็นคำตอบสมการโพลิโนเมียล

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

โดยที่ a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0 เป็นจำนวนเต็ม
จงแสดงว่า α และ β สามารถเขียนอยู่ในรูปตัวประกอบของ a_0 กับ a_n ตามลำดับ

วิธีทำ แทนค่า $\frac{\alpha}{\beta}$ ลงในสมการ

$$a_n \frac{\alpha^n}{\beta^n} + a_{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\alpha}{\beta} + a_0 = 0$$

คูณทั้งสองข้างด้วย β^n จะได้ว่า

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \ldots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n = 0 \qquad (1)$$

หารด้วย α ทั้งสองข้างของสมการ

$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta + \ldots + a_1\beta^{n-1} = -\frac{a_0\beta^n}{\alpha} \qquad (2)$$

เนื่องจาก a_n , a_{n-1} , ..., a_1 และ α เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น $a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta + \ldots + a_1\beta^{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม
จะทำให้ขวามือของสมการ (2) คือ $-a_0\frac{\beta^n}{\alpha}$ จะเป็นจำนวนเต็ม
เนื่องจาก α ไม่มีตัวร่วมกับ β ($\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ) ดังนั้น α หาร β^n ไม่ลงตัว นั่นคือ α หาร a_0 ลงตัว สรุปได้ว่า α เป็นตัวประกอบของ a_0
ในทำนองเดียวกัน จากสมการ (1)

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \ldots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n = 0$$

หารด้วย β ทั้งสองข้างของสมการ

$$a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2}\beta + \ldots + a_0\beta^{n-1} = -\frac{a_n\alpha^n}{\beta} \qquad (3)$$

เนื่องจาก a_n , a_{n-1} , ..., a_1 และ α เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น $a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2}\beta + \ldots + a_0\beta^{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม

จะทำให้ขวามือของสมการ (3) คือ $-a_n \frac{\alpha^n}{\beta}$ จะเป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก β ไม่มีตัวร่วมกับ α ($\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ) ดังนั้น β ไม่สามารถหาร α^n ลงตัว นั่นคือ β จะต้องหาร a_n ลงตัว สรุปได้ว่า β เป็นตัวประกอบของ a_n สรุปได้ว่า

α เป็นตัวประกอบของ a_0

β เป็นตัวประกอบของ a_n

◙

ตัวอย่าง 1.28 จงแสดงว่า $2+i$ เป็นคำตอบสมการโพลิโนเมียล

$$z^4-5z^3+3z^2+19z-30=0$$

และจงหาคำตอบที่เหลือของสมการนี้

วิธีทำ เนื่องจากสมการโพลิโนเมียลมี ส.ป.ส เป็นจำนวนจริง และมีคำตอบหนึ่งคือ $2+i$ ดังนั้น $\overline{2+i}=2-i$ จะเป็นคำตอบของสมการโพลิโนเมียลด้วย กำหนดให้ z_1,z_2,z_3,z_4 เป็นคำตอบของสมการ จะได้ว่า

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)=z^4-5z^3+3z^2+19z-30 \qquad (1)$$

เนื่องจาก $2+i$ และ $2-i$ เป็นคำตอบ 2 คำตอบ

แทนค่า $z_1=2+i$ และ $z_2=2-i$ และ

$$(z-z_1)(z-z_2)=\big(z-(2+i)\big)\big(z-(2-i)\big)=z^2-4z+5$$

ในสมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(z^2-4z+5)(z-z_3)(z-z_4)&=z^4-5z^3+3z^2+19z-30\\(z-z_3)(z-z_4)&=\frac{z^4-5z^3+3z^2+19z-30}{z^2-4z+5}\\&=z^2-z-6\\&=(z-3)(z+2)\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการโพลิโนเมียลคือ

$$z_1=2+i,\ z_2=2-i,\ z_3=3,\ z_4=-2$$ ◙

ตัวอย่าง 1.29 จงหาคำตอบของสมการโพลิโนเมียล

$$6z^4 - 47z^3 + 148z^2 - 167z + 52 = 0 \qquad (1)$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$a_0 = 52$ ตัวประกอบคือ $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 13$ เป็นตัวประกอบของ β
$a_n = 6$ ตัวประกอบคือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ เป็นตัวประกอบของ α

ดังนั้น ตัวประกอบ $\frac{\beta}{\alpha}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

$$\pm 1 \ , \ \pm 2 \ , \ \pm 3 \ , \ \pm 13 \ ,$$
$$\pm\frac{1}{2} \ , \ \pm\frac{13}{2} \ , \ \pm\frac{1}{3} \ , \ \pm\frac{2}{3} \ , \ \pm\frac{4}{3} \ , \ \pm\frac{13}{3}\pm\frac{1}{6}, \ \pm\frac{13}{6}$$

การหาคำตอบโดยการแทนค่าในสมการ (1) แต่ละตัว พบว่า $\frac{1}{2}$ และ $\frac{4}{3}$ เป็นคำตอบของสมการนั่นคือ

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{4}{3}\right) = z^2 - \frac{11}{6}z + \frac{2}{3} \text{ หรือ } 6z^2 - 11z + 4$$

เป็นตัวประกอบหนึ่งของสมการโพลิโนเมียล (1)

$$\left(6z^2 - 11a + 4\right)\left(z - z_3\right)\left(z - z_4\right) = 6z^4 - 47z^3 + 148z^2 - 167z + 52 = 0$$

$$\begin{aligned}\left(z - z_3\right)\left(z - z_4\right) &= \frac{6z^4 - 47z^3 + 148z^2 - 167z + 52}{6z^2 - 11a + 4} \\ &= z^2 - 6z + 13\end{aligned}$$

และ $z^2 - 6z + 13 = 0$ มีคำตอบคือ

$$z_3 = \frac{6 + \sqrt{36 - 52}}{2} = 3 + 2i$$
$$z_4 = \overline{z_3} = \overline{(3 + 2i)} = 3 - 2i$$

ดังนั้น $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 3 + 2i, 3 - 2i$ เป็นคำตอบของสมการ (1)

◘

ตัวอย่าง 1.30

กำหนดสมการโพลิโนเมียล , $a_n \neq 0$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (1)$$

และ $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n$ เป็นคำตอบของสมการ

จงแสดงว่า

1. ผลรวมของทุกคำตอบ $= -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

นั่นคือ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

2. ผลคูณของทุกคำตอบ $= (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

นั่นคือ $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

วิธีทำ สัญลักษณ์ผลคูณคือ $\prod$ นิยามโดย

$$\prod_{j=1}^{k} b_j = b_1 \cdot b_2 \cdots b_k$$

ถ้า $z_1, z_2, \ldots, z_n$ เป็นคำตอบทั้งหมดของสมการ

สมการ (1) จะเขียนอยู่ในรูป

$$a_n (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) = 0$$

$$a_n \left(z^n - (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) z^{n-1} + \ldots + (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n\right) = 0$$

และ

$$a_n \left(z^n - (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) z^{n-1} + \ldots + (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n\right)$$
$$= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

เมื่อใช้การเทียบ ส.ป.ส จะได้ ส.ป.ส ของเทอม z^{n-1} คือ

$$-a_n (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = a_{n-1}$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

และ ส.ป.ส ของเทอม a_0 คือ

$$a_n\left(-1\right)^n z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = a_0$$

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \left(-1\right)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \left(-1\right)^n \frac{a_0}{a_n}$$