บทที่ 14 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

บทที่ 14 จำนวนเชิงซ้อน

เนื้อหาโดยสรุป

14.1 **ทำไมจึงต้องมีจำนวนเชิงซ้อน** ในระบบจำนวนจริง ถ้า $x \in R$ แล้ว $x^2 \geq 0$ เสมอ ดังนั้นสมการเช่น $x^2 + 1 = 0$ หรือ $x^2 = -1$ จึงไม่สามารถหาคำตอบได้ จึงต้องสร้างจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริงขึ้นมา ซึ่งเรียกว่า ***จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)*** (จำนวนที่ไม่มีในระบบจำนวนจริง) โดยให้มีตัวแปร i เพิ่มขึ้นมา และ $i^2 = -1$ และ เรียกจำนวนที่อยู่ในรูปแบบ $a + bi$ เมื่อ $a, b \in R$ ว่า ***จำนวนเชิงซ้อน***

14.2 **รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน** ถ้า z เป็น ***จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)*** จะเขียน z เขียนได้ 2 แบบ คือ $z = a + bi$ หรือ (a, b) โดยที่ $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$) เรียก a ว่า ***ส่วนจริง (Real Part)*** และ b ว่า ***ส่วนจินตภาพ (Imaginary Part)*** ซึ่งอาจแทนด้วย $Re(z)$ และ $Im(z)$ ตามลำดับ

ถ้า $a, b \neq 0$ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพ**

ถ้า $a = 0$, $b \neq 0$ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้**

ถ้า $a \neq 0$, $b = 0$ เรียกว่า **จำนวนจริง**

14.3 **การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน**

การบวก : $a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$ หรือ

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

การคูณ : $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ หรือ

$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

หมายเหตุ $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$

เป็นการคูณแบบกระจายในระบบจำนวนจริงนั่นเอง โดยที่ $i^2 = -1$

14.4 **สมบัติของการบวกจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ก. สมบัติปิด : $z_1 + z_2 \in C$

ข. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

ค. สมบัติการสลับที่ : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

ง. สมบัติการมีเอกลักษณ์ : มี $(0,0)$ หรือ 0 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่

$(0,0) + (a, b) = (a, b) + (0,0) = (a, b)$ หรือ

$0 + a + bi = a + bi + 0 = a + bi$

จ. สมบัติการมีอินเวอร์ส : สำหรับทุก (a, b) จะมี $(-a, -b)$ เป็นอินเวอร์ส โดยที่

$(-a, -b) + (a, b) = (a, b) + (-a, -b) = (0,0)$ หรือ

$-a - bi + a + bi = a + bi - a - bi = 0$

14.5 **สมบัติของการคูณจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ก. สมบัติปิด : $z_1 z_2 \in C$

ข. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม : $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

ค. สมบัติการสลับที่ : $z_1 z_2 = z_2 z_1$

ง. สมบัติการมีเอกลักษณ์ : มี $(1,0)$ หรือ 1 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่

$$(1,0)(a,b) = (a,b)(1,0) = (a,b) \quad \text{หรือ}$$

$$(1)(a+bi) = (a+bi)(1) = a+bi$$

จ. สมบัติการมีอินเวอร์ส : สำหรับทุก (a,b) จะมี $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ เป็นอินเวอร์สโดยที่

$$(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})(a,b) = (a,b)(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1,0)$$

หรือ

$$(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i)(a+bi) = (a+bi)(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i) = 1$$

ฉ. สมบัติการแจกแจง : $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

หมายเหตุ เขียนอินเวอร์สการคูณของ z ด้วย z^{-1} หรือ $\frac{1}{z}$ และ $z^{-3} = \frac{1}{z^3}$ เป็นต้น.

14.6 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $\bar{z} = a-bi$ จะแทน ***สังยุค (Conjugate)*** ของจำนวนเชิงซ้อน z

14.7 การคูณที่น่าสนใจ

ก. จำนวนจิตนภาพแท้คูณกับจำนวนจินตภาพแท้ ได้จำนวนจริง เช่น $(5i)(2i) = 10i^2 = -10$

ข. จำนวนที่เป็นสังยุคกันคูณกันจะได้จำนวนจริง

เช่น $(3+4i)(3-4i) = 9-12i+12i-16i^2 = 9+16 = 25$

หมายเหตุที่ใช้บ่อย ๆ ก็คือ $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ นั่นเอง

14.8 การหารจำนวนเชิงซ้อน

การหารจำนวนเชิงซ้อน ให้นำสังยุคของตัวส่วนมาคูณทั้งเศษและส่วน เช่น $3+4i \div 5-12i = ?$

$$\frac{3+4i}{5-12} \times \frac{5+12i}{5+12i} = \frac{15+36i+20i-48i^2}{5^2+12^2} = \frac{63+56i}{169} = \frac{63}{169} + \frac{56}{169}i$$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

14.9 สมบัติของสังยุค

ถ้า z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ก. $\bar{a} = a$

ข. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ และ $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)$

ค. $\bar{\bar{z}} = z$

ง. $\overline{z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \pm \ldots \pm \bar{z}_n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก

จ. $\overline{z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_n} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 \times \ldots \times \bar{z}_n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก

ฉ. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

ช. $\overline{z^m} = (\bar{z})^m$, m เป็นจำนวนเต็ม

14.10 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z = (a,b) = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ถ้าสร้างระนาบแกนมุมฉากขึ้นมาใหม่ โดยที่แกนราบให้เรียกว่า ***แกนจริง (Real Axis)*** ส่วนแกนตั้งเรียกว่า ***แกนจินตภาพ (Imaginary Axis)*** แล้ว $z = (a,b)$ จะสามารถแทนได้ด้วย ***จุด*** (a,b) หรือ ***เวกเตอร์***ที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุดปลายอยู่ที่ (a,b) และ เรียกระนาบดังกล่าวว่า ***ระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane)***

ขนาดของเวกเตอร์ของ z ดังกล่าวเรียกว่า ***ค่าสัมบูรณ์ (Absolute)*** ของ z จะเขียนแทนด้วย $|z|$ ซึ่งแทนความยาวของส่วนของเส้นตรงจากจุด $(0,0)$ ถึง (a,b) จึงได้ว่า $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ เช่น $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

14.11 สมบัติของค่าสัมบูรณ์

ถ้า z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

ก. $|z|^2=z\bar{z}$

ข. $|z|=|-z|$

ค. $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$

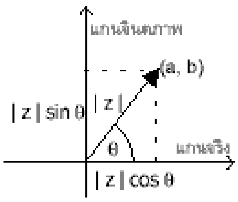
ง. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

จ. $|z^n|=|z|^n$

14.12 หลักการเขียนกราฟของสมการจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน

ให้แทน $z=x+yi$ ลงไปในสมการ เช่น $|z-1|=2$ จะได้ว่า $|x+yi+1|=2$ หรือ $|(x+1)+yi|=2$ ดังนั้น $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2$ ถ้ายกกำลังสองจะได้ว่า $(x+1)^2+y^2=2^2$ ซึ่งเป็นกราฟรูปวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1,0)$ และ รัศมี 2 หน่วยบนระนาบเชิงซ้อน

14.13 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน



จากรูป $z=(a,b)=a+bi$ จะเห็นว่า $a=|z|\cos\theta$ และ $b=|z|\sin\theta$

$\therefore \quad z=(|z|\cos\theta, |z|\sin\theta)=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

เรียก $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ ว่าเป็น ***รูปเชิงขั้ว (Polar Form)*** หรือ บางทีก็เขียนเป็น $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เมื่อให้ $r=|z|$

เรียก θ ว่า ***อาร์กิวเมนต์ของ z (Argument of z)*** หรือ แทนด้วย $\mathrm{Arg}(z)$ โดยที่ $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ (ต้องพิจารณาเครื่องหมายให้ถูกควอดรันต์ด้วย เพราะ θ จะมีได้หลายค่า)

การเขียน z ในรูปเชิงขั้วทำได้หลายแบบแล้วแต่ความถนัด เช่น $z=1-\sqrt{3}i$

<u>แบบที่ 1</u> , หา $|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, หา $\tan\theta=\dfrac{b}{a}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ แล้วพิจารณาว่า $\theta=?$ โดยดูว่าต้องอยู่ในควอดรันต์ที่ 4 เพราะ $a>0, b<0$ จะได้ว่า $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$ เป็นต้น. จาดนั้นแทนค่าใน

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$$

<u>แบบที่ 2</u> , ใช้ความฉลาดจากสมอง (ตอบไม่ได้ว่ามันมาได้อย่างไร) เช่น

$$z=1-\sqrt{3}i=2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}) \text{ หรือ } 2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$$

หมายเหตุ ในอดีตเดิมผมใช้แบบที่ 1 ต่อมาเปลี่ยนไปใช้แบบที่ 2 โดยอัตโนมัติ หลังจากผ่านการสอนมาหลายปี

14.14 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ถ้า $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ จะได้ว่า

ก. $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

ข. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

หมายเหตุบางตำราเรียก z ในรูปเชิงขั้วแบบสั้น ๆ ว่า $z = \text{cis}\,\theta$ จึงอาจเขียนสูตร ก. และ ข. เป็น

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1+\theta_2)$ และ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$

14.15 การยกกำลัง m และ รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ก. ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ จะได้ว่า $z^m = r^m[\cos(m\theta) + i\sin(m\theta)]$, m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เช่น ถ้า $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ แล้ว $z^{0.7} = 2^{0.7}(\cos\frac{0.7}{3}\pi + i\sin\frac{0.7}{3}\pi)$

ข. ถ้า $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้วรากที่ n ของ z จะมี n ค่า

โดยที่ $z = r^{\frac{1}{n}}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})$ โดยที่ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

14.16 รากที่สองของ $a+bi$ ✎ , ถ้า $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ แล้วรากที่สองของ $a+bi$ อาจเขียนแทนด้วย $\pm\sqrt{a+bi}$ ซึ่งจะมี 2 ค่า คือ $\pm(\sqrt{\dfrac{|z|+a}{2}}$, เครื่องหมายเหมือนกับ b $\sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}})$

เช่น ถ้า $x^2 = 3-4i$ จะได้ว่า $|z| = 5$ และ $x = \pm\sqrt{3-4i} = \pm(\sqrt{\dfrac{5+3}{2}}, -\sqrt{\dfrac{5-3}{2}})$

$\therefore$ $x = \pm(2-i)$ ซึ่งก็คือ $2-i$ กับ $-2+i$

14.17 สมการพหุนาม คือ สมการที่อยู่ในรูปแบบ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $n \in I^+$, $a_n \neq 0$ เรียกว่า ***สมการพหุนามกำลัง*** n

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เรียกว่า ***สัมประสิทธิ์ของพหุนาม*** ถ้าสัมประสิทธิ์อยู่ในเซตของจำนวนเต็ม ก็จะเรียกว่า ***พหุนามบนเซตของจำนวนเต็ม*** , ถ้าสัมประสิทธิ์อยู่ในเซตของจำนวนจริง ก็จะเรียก***ว่าพหุนามบนเซตจำนวนจริง*** และ ทำนองเดียวกัน ก็จะมี ***พหุนามบนเซตของจำนวนเชิงซ้อน*** ตัวอย่างพหุนามต่าง ๆ ตามลำดับที่กล่าวมา เช่น

$3x^7 - x^5 + 1 = 0$, $a_7 = 3$, $a_6 = 0$, $a_5 = -1$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 1$

$\frac{1}{4}x^2 - 9x - 2 = 0$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_1 = -9$, $a_0 = -2$

$x^2 - (2+3i)x - 1 + 3i = 0$

และ เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงจะให้ $P(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

14.18 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมการพหุนาม

ก. ***ทฤษฎีบทพีชคณิตเบื้องต้น*** (The Fundamental Theorem of Algebra) , ทุก ๆ $P(x) = 0$ จะมีคำตอบของสมการอย่างน้อย 1 สมการเสมอ เช่น $2002x^{2002} + \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}x - 1 = 0$ จะต้องมีคำตอบแน่นอนอย่างน้อย 1 คำตอบ (คำตอบดังกล่าวอาจจะเป็นจำนวนอะไรก็ได้และสัมประสิทธิ์จะเป็นอะไรก็ได้) และ ทำให้ได้ว่า

✎ ใช้บ่อยมาก นักเรียนควรจดจำไว้ให้ดี

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = a_n(x-r_1)(x-r_2)....(x-r_n)$ เมื่อ r_i , $i = 1,2,...,n$ เป็นรากของสมการ $P(x) = 0$ ซึ่งอาจจะซ้ำกันบ้างหรือต่างกันหมดเลยอย่างใดก็ได้ เช่น $P(x) = (x+2)(x-i)(x+i)(x-3)^7(x+1)^4 = 0$ เป็นสมการพหุนามกำลัง 14 ที่มีรากซ้ำกัน 2 ชุด คือ $x = 3$, 7 ชุด และ $x = -1$, 4 ชุด

ข. ***ทฤษฎีบทเศษเหลือ*** (Remainder Theorem) เศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x-c$ จะมีค่าเท่ากับ $P(c)$ เช่น เศษของ $x^{2002} - 1997 \div x - 1$ จะมีค่าเท่ากับ $p(1)$ หรือ $1^{2002} - 1997 = -1996$ หรือ เศษของ $x^2 - 5x + 1 \div x - i$ จะมีค่าเท่ากับ $P(i)$ หรือ $i^2 - 5i + 1 = -5i$ เป็นต้น.

ค. ***ทฤษฎีบทตัวประกอบ*** (Factor Theorem) พหุนาม $P(x)$ จะมีตัวประกอบ เป็น $x-c$ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$ เช่น ถ้า $x-2$ เป็นตัวประกอบของ $x^2 - ax + b = 0$ จะได้ว่า $P(2) = 0$ หรือ $2^2 - a(2) + b = 0$ เป็นต้น.

หรือ ถ้า $P(x) = x^3 - 6x + 4 = 0$ จะพบว่า $P(2) = 2^3 - 6(2) + 4 = 0$ แสดงว่า $x^3 - 5x + 4$ จะต้องมี $x-2$ เป็นตัวประกอบ หรือ $x^3 - 6x + 4 = (x-2)Q(x)$ นั่นเอง (เมื่อ $Q(x)$ เป็นพหุนามกำลัง 2)

หรือ ถ้า $P(x) = x^2 - 2x + 5$ จะพบว่า

$$P(1+2i) = (1+2i)^2 - 2(1+2i) + 5 = -3 + 4i - 2 - 4i + 5 = 0$$

แสดงว่า $x^2 - 2x + 5 = [x - (1+2i)]G(x)$ (เมื่อ $G(x)$ เป็นพหุนามกำลัง 1)

ง. ***ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ*** ให้พหุนาม $P(x)$ เป็นพหุนามบนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ โดยที่ $m,k \in I$, $m \neq 0$ และ $(k,m) = 1$ แล้ว k จะเป็นตัวประกอบของ a_0 ส่วน m จะเป็นตัวประกอบของ a_n ✎

จ. ***ทฤษฎีบทอื่น ๆ ที่จำเป็น***

(1) ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามบนเซตของจำนวนจริง ✍ ถ้า $P(x)$ มี $a+bi$ เป็นตัวประกอบ (หรือ $P(x) = 0$ มี $a+bi$ เป็นคำตอบ นั่นคือ $P(a+bi) = 0$) แล้ว $a-bi$ จะเป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ด้วย (หรือ $a-bi$ จะเป็นคำตอบ นั่นคือ $P(a-bi) = 0$ ด้วย)

เช่น ถ้า $1+2i$ เป็นรากของสมการ $x^2 - 2x + 5 = 0$ จะได้ว่า $1-2i$ จะเป็นคำตอบของสมการดังกล่าวด้วย หรือ ว่า $x^2 - 2x + 5 = [x-(1+2i)][x-(1-2i)] = 0$ เป็นต้น.

(2) ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามบนเซตของจำนวนเต็ม ✈ ถ้า $P(x)$ มี $a + \sqrt{b}$ เป็นตัวประกอบ แล้ว $a - \sqrt{b}$ จะเป็นตัวประกอบด้วย

14.19 สมการกำลังสอง

ถ้า $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ แล้วจะได้ว่า

ก. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ใช้ได้ทุกกรณีไม่ว่า a,b และ c จะเป็นจำนวนใด ๆ ก็ตาม

ข. ถ้า x_1, x_2 เป็นรากของสมการในข้อ ก. แล้วจะได้ว่า $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ กับ $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

✎ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ตั้งแต่ ข้อ ข. - ง. นักเรียนได้เรียนมาแล้วทั้งนั้นใน ค.011 ม.4 เทอม 1 เรื่อง จำนวนจริง

✍ ทฤษฎีบทข้อนี้ใช้บ่อยมาก นักเรียนควรที่จะจดจำไว้

✈ รู้ไว้ใช่ว่า ใส่บ่าแบกหาม

14.20 สมการกำลัง n

ถ้า $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นรากของสมการดังกล่าวแล้วจะได้ว่า

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1} \qquad ***$$

$$S_2 = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}$$

$$S_3 = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}$$

....

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_0 \qquad ***$$

note ถ้า สัมประสิทธิ์ของ x^n มีค่าไม่เท่ากับ 1 (คือ $a_n \neq 1$) ให้ทำเป็น 1 โดยนำ a_n หารตลอด

14.21 ผลบวกของ i

ก. $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

ข. $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = 0$

ค. $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$ และ $\frac{1}{i^{4n}} + \frac{1}{i^{4n+1}} + \frac{1}{i^{4n+2}} + \frac{1}{i^{4n+3}} = 0$, $n \in I$

เพราะ $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = i^2$, $i^{4n+3} = i^3$

ศูนย์กลางคณิตศาสตร์ไทย
สำหรับผู้มีใจรักคณิตศาสตร์

แหล่งที่มา :

http://www.mathcenter.net/review/review14/review14p01.shtml

http://www.mathcenter.net/review/review14/review14p02.shtml

http://www.mathcenter.net/review/review14/review14p03.shtml

ณ วันที่ 1 พฤศจิกายน 2550