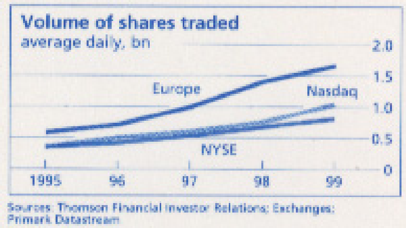
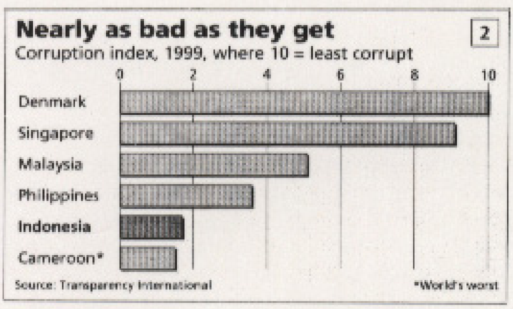
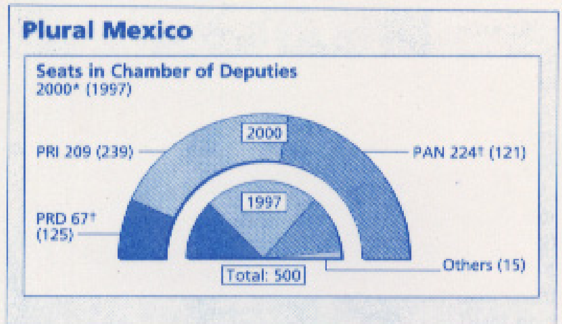
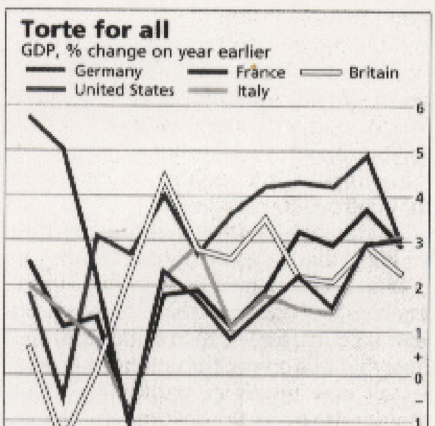
ISBN 974-593-938-2

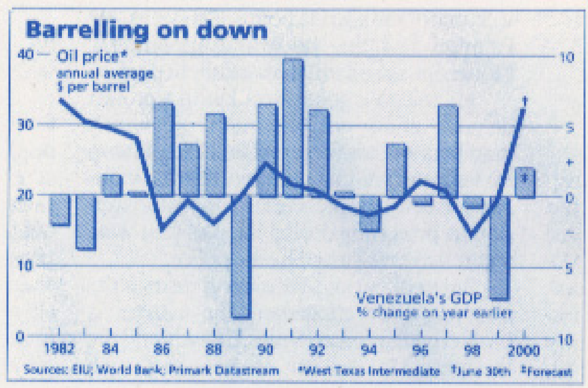
ทฤษฎีกราฟ
GRAPH THEORY











ผศ. นิตย์ รื่นรมย์

MA 335

45219 ○ 42.-

ทฤษฎีกราฟ

GRAPH THEORY

MA 335

ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ผศ. นิตย์ รื่นรมย์

45219

สงวนลิขสิทธิ์	ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยรามคำแหง
พิมพ์ที่	สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
พิมพ์ครั้งที่	1 พ.ศ. 2545 จำนวน 500 เล่ม
จำนวนหน้า	232 หน้า
ISBN	**974-593-938-2**
ปีที่เคยพิมพ์	-
ผู้จัดจำหน่าย	สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง

เปลวเทียนให้แสง รามคำแหงให้ทาง

คำนำ

หนังสือทฤษฎีกราฟเล่มนี้เขียนเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นหนังสือประกอบการเรียนการสอนกระบวนวิชา คณ. 335 ทฤษฎีกราฟ (MA 335 Graph Theory) ตามหลักสูตรปริญญาตรีคณิตศาสตร์ ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

หนังสือเล่มนี้มีเนื้อหาแบ่งเป็นสองส่วน ส่วนแรกเกี่ยวข้องกับบทนิยามพื้นฐานต่าง ๆ ในเรื่องกราฟพร้อมทั้งตัวอย่างและการประยุกต์ ส่วนที่สองเป็นหัวข้อเรื่องที่สำคัญในทฤษฎีกราฟ เช่น กราฟแบบออยเลอร์ กราฟต้นไม้ และการให้สีกราฟ

ผู้เขียนหวังว่านักศึกษาและผู้สนใจจะได้รับประโยชน์จากหนังสือเล่มนี้ตามสมควร เพราะทฤษฎีกราฟมีเนื้อหาที่สามารถนำไปประยุกต์ได้ในสาขาวิชาการต่าง ๆ ปัจจุบันเช่นในด้านวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ในการเขียนเรียบเรียงอาจมีข้อบกพร่อง ผู้เขียนยินดีรับคำแนะนำเพื่อแก้ไขปรับปรุงให้ดียิ่งขึ้นต่อไป

นิตย์ รื่นรมย์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยรามคำแหง

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

บทที่ 1
กราฟ (GRAPHS)

1.1 **นำเรื่อง**

พ.ศ. 2276 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผู้ได้รับการยกย่องว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่คนหนึ่งของพุทธศตวรรษที่ 24 ได้เริ่มต้นงานทฤษฎีกราฟจากการนำเสนอผลงานแสดงวิธีการแก้ปัญหาของสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก

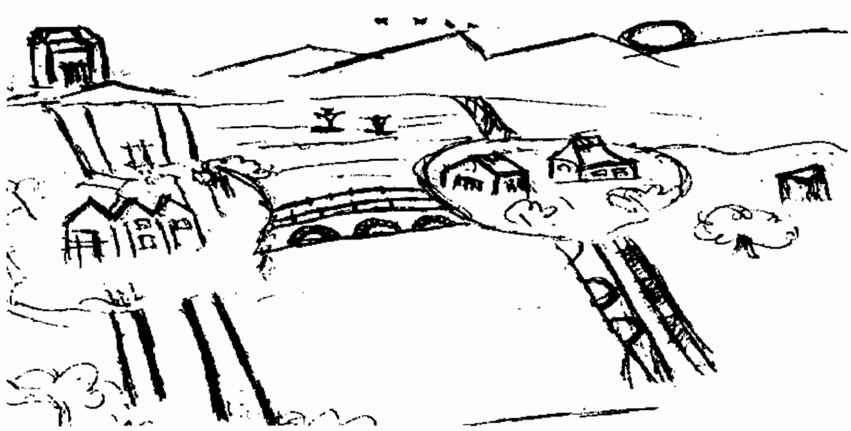
เพื่อเป็นการระลึกถึงและยกย่องออยเลอร์ นักคณิตศาสตร์ ชาวสวิสผู้ริเริ่มทฤษฎีกราฟ ขอกล่าวถึงประวัติและผลงานของออยเลอร์พอเป็นสังเขป

ออยเลอร์เกิดที่เมืองเนเซล ประเทศสวิตเซอร์แลนด์ พุทธศักราช 2250 ได้เล่าเรียนและศึกษาต่อจนถึงระดับอุดมศึกษาเรียนต่อในระดับปริญญาโท เมื่ออายุเพียง 17 ปี และได้รับเลือกให้เป็นหัวหน้าภาคคณิตศาสตร์ของสถาบันเซนต์ปีเตอร์สเบอร์ก ประเทศรัสเซีย

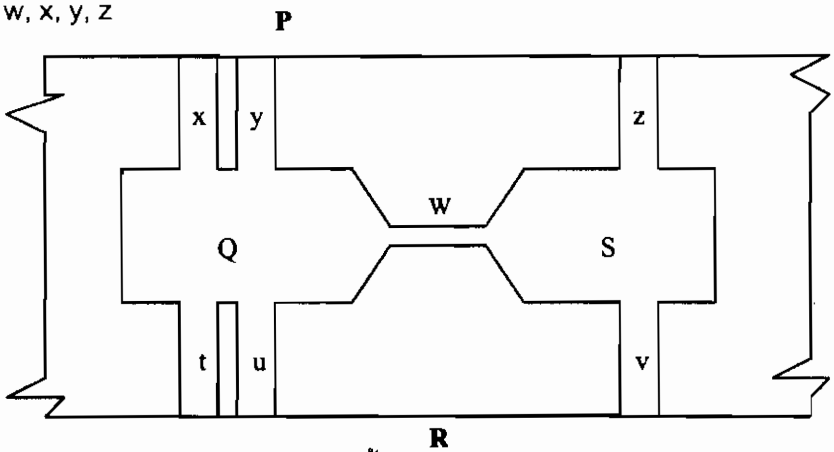
ออยเลอร์แต่งงานและความที่รักเด็ก ๆ ออยเลอร์มีลูกถึง 13 คน พร้อมกับผลิตงานคณิตศาสตร์ออกมาเป็นจำนวนมากทั้งหนังสือและรายงานมากกว่า 500 เรื่อง งานวิจัยด้านคณิตศาสตร์ของออยเลอร์โดยเฉลี่ยปีละ 800 หน้า ออยเลอร์มีความทรงจำเป็นเลิศและสามารถคิดคำนวณในใจได้อย่างรวดเร็ว

ออยเลอร์สูญเสียสายตาไปข้างหนึ่งเมื่อเริ่มต้นทำงานอาชีพ และในขณะที่อายุได้ 56 ปี ก็พบว่ากำลังจะเสียตาไปอีกข้างหนึ่งออยเลอร์จึงเตรียมตัวรับสภาวะของคนตาบอดด้วยการฝึกหัดเขียนสูตรบนกระดานขนาดใหญ่ ต่อมาเมื่อออยเลอร์อายุได้ 60 ปี ก็ตาบอดสนิททั้งสองข้าง ซึ่งสภาวะเช่นนี้คนปกติมักจะหยุดทำงานหรือทำงานได้ช้าลง แต่สำหรับออยเลอร์ผลงานกลับรุ่งโรจน์มากขึ้น

กลับมาที่ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก ซึ่งประกอบด้วย แผ่นดินสองฝั่งแม่น้ำ และเกาะสองแห่งกลางแม่น้ำ ดินแดนทั้งสี่แห่งเชื่อมถึงกันด้วยสะพานเจ็ดแห่ง (ดังภาพ)

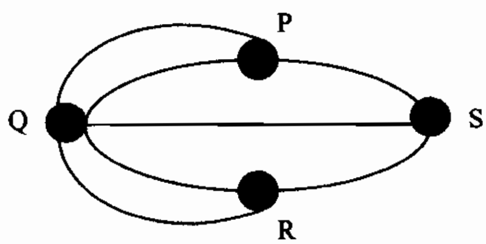


จากกราฟวาด เมื่อจำลองเป็นแผนผังและกำหนดสถานที่ 4 แห่งกับสะพาน 7 แห่ง ด้วยอักษร P, Q, R, S กับ t, u, v, w, x, y, z



ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก ตั้งไว้ว่า ชาวเมืองโคนิกสเบอร์กจะสามารถเดินทางท่องเที่ยวชมเมืองได้ทุกแห่งแล้วกลับมายังที่เดิมโดยใช้สะพานทุกแห่งเพียงแห่งละหนึ่งครั้งได้หรือไม่

เห็นได้ชัดเจนว่าปัญหานี้เหมือนกันกับปัญหาที่ตั้งเป็นคำถามว่าจะสามารถเขียนกราฟข่ายงาน (ซึ่งใช้จุด P, Q, R, S แทนสถานที่สี่แห่งและเส้น t, u, v, w, x, y, z แทนสะพานทั้งเจ็ดแห่ง)



โดยเริ่มจากจุดใดจุดหนึ่งไปยังจุดอื่น ๆ ทุกจุดตามเส้นในกราฟทุกเส้นเพียงเส้นละหนึ่งครั้งแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นโดยไม่ยกดินสอได้หรือไม่

ออยเลอร์หาวิธีแก้ปัญหาด้วยการชี้ให้เห็นว่าจำนวนวิธีของการเลือกวิถีนั้นค่อนข้างเสียเวลามาก และเห็นว่าควรมีคำตอบแบบทั่วไปสำหรับปัญหานี้ จึงจำลองแผนที่เป็นกราฟข่ายงานที่มีหลายวิถีดังรูปข้างต้นและกำหนดปัญหาเหลือเพียงคำถามสั้น ๆ ว่า "วิถีใดเป็นวงจรแบบออยเลอร์"

ออยเลอร์พิจารณาว่ามีจุดอยู่สองแบบ เรียกว่า จุดคู่ และจุดคี่ จุดคู่จะมีเส้นมาสิ้นสุดที่จุดนั้นเป็นจำนวนคู่ และจุดคี่จะมีเส้นมาสิ้นสุดที่จุดนั้นเป็นจำนวนคี่ จุด P, Q, R, S เป็นจุดคี่ ออยเลอร์พบว่ากราฟข่ายงานซึ่งจุดทั้งหมดเป็นจุดคู่จะมีวงจรแบบออยเลอร์ และนั่นเป็นจุดเริ่มต้นของเรื่องทฤษฎีกราฟ ซึ่งสำหรับการหาคำตอบของปัญหานี้จะแสดงให้เห็นตามวิธีการของออยเลอร์ต่อไป เมื่อถึงเรื่องกราฟออยเลอร์ ในขั้นนี้จะเป็นการแนะนำเรื่องเกี่ยวกับบทนิยามต่าง ๆ ก่อน ดังนี้

1.2 บทนิยาม

บทนิยาม 1.2.1

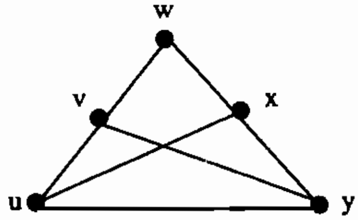
<u>จุดยอดและเส้นเชื่อม</u> (Vertices and Edges)

กราฟประกอบด้วย เซตของจุดยอด V และเซตของเส้นเชื่อม E ที่มีจำนวนนับได้เส้นเชื่อมจะโยงระหว่างจุดยอด 2 จุดที่แตกต่างกัน จุดยอดทั้งสองเรียกว่าจุดปลายของเส้นเชื่อม

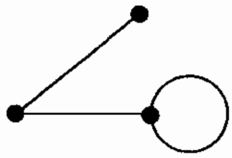
ตามบทนิยามได้กำหนดให้ G แทนกราฟ เซตของจุดยอดในกราฟ G จะเขียนสัญลักษณ์ได้ในรูป V(G) และเซตของเส้นเชื่อม คือ E(G) และถ้า v กับ w เป็นจุดยอด 2 จุดใด ๆ ใน G เส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองคือ vw หรือ wv

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

G :



ในที่นี้ V(G) = {u, v, w, x, y} และ E(G) = {uv, vw, wx, xy, wy, ux, vy} ในกราฟมีเส้นเชื่อม ux ตัดกับเส้นเชื่อม vy จุดที่เส้นเชื่อมตัดกันนี้ไม่ใช่จุดยอดจะไม่มีอักษรกำหนด และตามบทนิยาม เส้นที่เริ่มออกจากจุดใดจุดหนึ่งแล้วกลับมาสิ้นสุดที่จุดเดิม เรียกว่า วงวน (loop) ไม่เรียกว่า เส้นเชื่อม (ดังรูป)



กราฟลักษณะนี้เรียกว่าเป็นกราฟเทียม (pseudo graph)

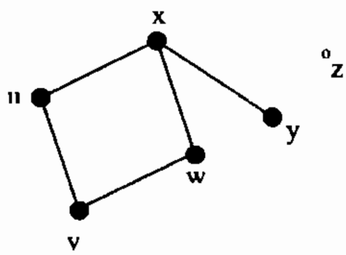
<u>บทนิยาม 1.2.2</u>

<u>ระดับขั้นของจุดยอด</u> (Degree of Vertex)

ถ้า v เป็นจุดยอดในกราฟ G จำนวนเส้นของ G ที่เชื่อมกับจุดยอด v เรียกว่าระดับขั้นของจุดยอด v ใน G และเขียนแทนด้วย deg G หรือ deg v

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

กราฟ G (ดังรูป)



มี deg u = deg v = deg w = 2

deg x = 3

deg y = 1

deg z = 0

ทฤษฎีบท 1.2.1

กราฟ G ใด ๆ จะมีระดับขั้นของจุดยอดเป็นสองเท่าของจำนวนเส้น

หรือ $\sum_{i=1}^{p} \deg v = 2q$ ซึ่ง p คืออันดับ และ q คือ จำนวน เส้น

พิสูจน์

เพราะว่าในการนับจำนวนระดับขั้นของจุดยอดทั้งหลายในกราฟ เส้นเชื่อมแต่ละเส้นในกราฟจะถูกนับ 2 ครั้ง (นับ 1 ครั้ง สำหรับจุดแรก และนับอีก 1 ครั้ง สำหรับจุดที่สอง) ดังนั้นผลรวมของระดับขั้นของจุดยอดจึงเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้น

จากทฤษฎีทำให้มีผลลัพธ์ตาม 3 ข้อ คือ ในกราฟใด ๆ

1. ผลรวมของระดับขั้นของจุดยอดทั้งหมดจะเป็นจำนวนคู่
2. จุดยอดที่มีระดับขั้นเป็นจำนวนคี่จะมีเป็นจำนวนคู่และ
3. ถ้ากราฟ G มีจุดยอด n จุด และเป็นกราฟที่จุดยอดทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ r กราฟ G จะมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนเท่ากับ $\frac{nr}{2}$

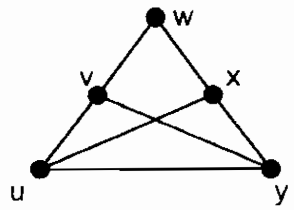
บทนิยาม 1.2.3

<u>อันดับและขนาด</u> (Orders and Degrees)

จำนวนจุดยอดใด ๆ ในกราฟ เรียกว่า อันดับของกราฟ ส่วนจำนวนของเส้นเชื่อมในกราฟ เรียกว่า ขนาดของกราฟ

กราฟ G ซึ่งมีเซตของจุดยอดเป็น V(G) และเซตของเส้นเชื่อมเป็น E(G) มีสัญลักษณ์ของอันดับและขนาดเป็น $|V|$ และ $|E|$ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3



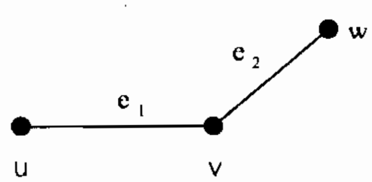
ในที่นี้ | V | = 5 จุด และ | E | = 7 เส้น

บทนิยาม 1.2.4

จุดประชิด

ถ้า e เป็นเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด u และ v จะเรียกว่าจุดยอด u ประชิดกับจุดยอด v หรือเรียกว่าเส้นเชื่อม e ประชิดกับจุดยอด u และ v

ตัวอย่างที่ 4



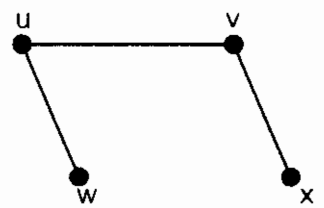
กราฟตามตัวอย่างมี u ประชิดกับ v และ v ประชิดกับ w ส่วน e_1 ประชิดกับ u และ v และ e_2 ประชิดกับ v และ w

บทนิยาม 1.2.5

เส้นประชิด

ถ้า uv และ vw เป็นเส้นเชื่อมที่ไม่ซ้ำกันในกราฟ G ($v \neq w$) จะเรียกว่าเส้นเชื่อม uv ประชิดกับเส้นเชื่อม uw

ตัวอย่างที่ 5



ตามกราฟนี้ เส้นเชื่อม uv ประชิดกับเส้นเชื่อม uw และเส้นเชื่อม uv ประชิดกับเส้นเชื่อม vx แต่เส้นเชื่อม uw ไม่ประชิดกับเส้นเชื่อม vx

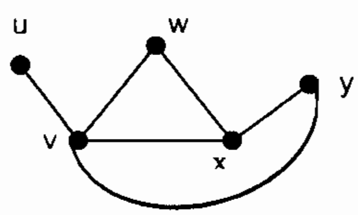
บทนิยาม 1.2.6

ความเชื่อมโยง (Connectedness)

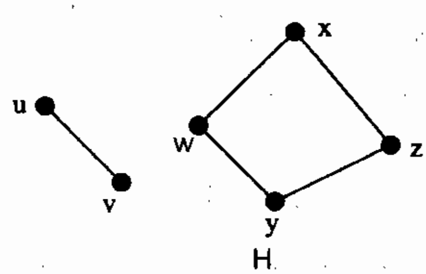
กราฟใด ๆ เรียกว่ามีความเชื่อมโยงถ้าสามารถลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดใดจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งจุดใดในกราฟได้ ถ้าทำไม่ได้ดังกล่าวนี้จะเรียกว่ากราฟไม่เชื่อมโยง หรือกราฟขาดความเชื่อมโยง

ตามบทนิยามจะเห็นได้ชัดว่าถ้าเป็นกราฟเชื่อมโยงจะสามารถลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งได้โดยไม่ต้องยกปากกาหรือดินสอ

ตัวอย่างที่ 6



G



H

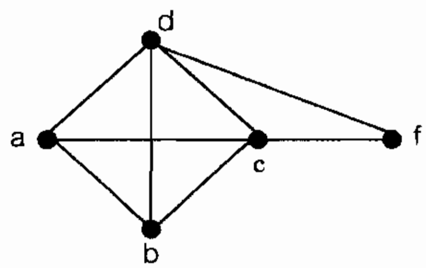
จะเห็นได้ว่ากราฟ G มีความเชื่อมโยงเพราะจะลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดใด ๆ ไปยังจุดยอดอื่น ๆ ได้ แต่กราฟ H ไม่มีความเชื่อมโยงเพราะไม่สามารถลากเส้นเชื่อมจากจุดยอด u หรือ v ไปยังจุดยอดอื่น ๆ ได้

<u>บทนิยาม</u> <u>1.2.7</u>

<u>จุดคู่หรือจุดคี่</u> (Even or odd vertex)

จุดยอดของกราฟเรียกว่าเป็นจุดคี่ ถ้าจุดยอดนั้น คือ จุดปลาย ของเส้นเชื่อมที่มีเป็นจำนวนคี่ ในทำนองเดียวกันจุดยอดของกราฟ เรียกว่า เป็นจุดคู่ ถ้าจุดยอดนั้นคือ จุดปลายของเส้นเชื่อมที่มีเป็นจำนวนคู่

<u>ตัวอย่างที่ 7</u>



กราฟนี้มีจุดยอด c จุดยอด d และจุดยอด f เป็นจุดคู่ ส่วน จุดยอด a และ b เป็นจุดคี่

<u>ทฤษฎีบท</u> <u>1.2.2</u>

ทุก ๆ กราฟมีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u>

ให้กราฟ G มีจุดคี่จำนวน k จุด คือ$v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k$

และมีจุดคู่จำนวน n จุด คือ $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$

เพราะว่า

$(\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots\ldots + \deg v_k) + (\deg w_1 + \deg w_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \deg w_n) = 2q$ (q = ขนาดของ G)

ดังนั้น

$(\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots\ldots + \deg v_k) = 2q - (\deg w_1 + \deg w_2 + \ldots\ldots + \deg w_n)$

= จำนวนคู่ (เพราะว่า $\deg w_1 + \ldots\ldots + \deg w_n$ = จำนวนคู่)

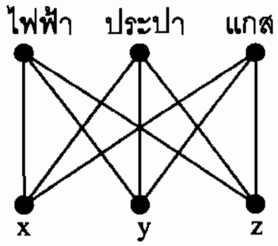
แสดงว่า k เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นกราฟ G มีจุดคี่เป็นจำนวนคู่ได้กราฟ G มีแต่จุดคี่ $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n$

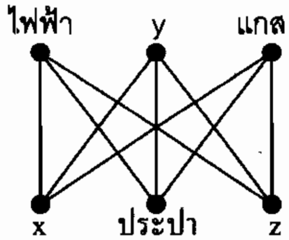
$(\deg v_1 + \deg v_2 + \ldots\ldots + \deg v_n) = 2q$

แสดงว่า n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นกราฟ G มีจุดคี่เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ ทุกกราฟมีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

1.3 <u>กราฟสมสัณฐาน</u> (isomorphic graphs)

กราฟสองรูปอาจจะมองเห็นว่ามีความแตกต่างกัน แต่แท้จริงแล้วเป็นกราฟเดียวกัน และในทางกลับกันกราฟ 2 รูปที่ดูเหมือนกัน แต่จริง ๆ แล้วเป็นกราฟที่แตกต่างกัน เช่น กราฟต่อไปนี้





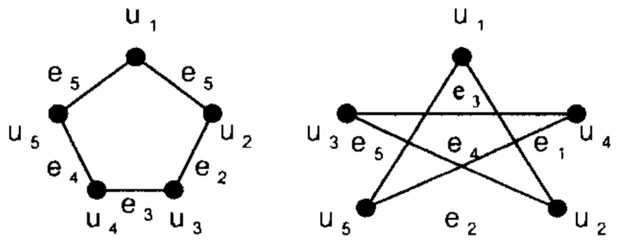
กราฟทั้งสองนี้ดูเหมือนกัน แต่ไม่ใช่กราฟเดียวกัน

<u>บทนิยาม 1.3.1</u>

<u>สมสัณฐาน</u>

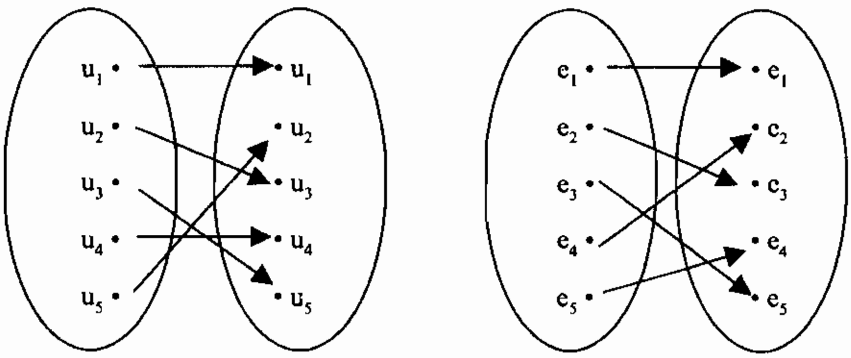
กราฟ G และ H เรียกว่าเป็นกราฟสมสัณฐาน ถ้ากราฟ H สร้างจากกราฟ G ได้ด้วยการกำหนดชื่อจุดยอดใหม่ และกราฟทั้งสองมีความสมนัย ระหว่างจุดยอดของ G กับจุดยอดของ H ในแบบหนึ่งต่อหนึ่งและจำนวนเส้นเชื่อมของจุดยอดใน G เท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมของจุดยอดใน H

ตัวอย่างที่ 8



กราฟ G กราฟ H กราฟ I

จะเห็นว่ากราฟ G และ H เป็นกราฟเดียวกัน ชุดของจุดยอด และเส้นเชื่อมตลอดจนฟังก์ชันจุดปลายเส้นเชื่อมเป็นแบบเดียวกัน แต่ดูแตกต่างกันส่วนกราฟ G กับกราฟ I ดูเหมือนกัน แต่กลับเป็นกราฟที่ต่างกันเพราะในกราฟ G จุดปลายของเส้นเชื่อม e_1 คือ u_1 กับ u_2 ส่วนจุดปลายของ e_1 ใน I เป็น u_1 และ u_3 อย่างไรก็ตาม ถ้ากำหนดชื่อจุดยอดของกราฟ I ใหม่ตามแบบของฟังก์ชันข้างล่างนี้ กราฟ I จะเหมือนกับกราฟ G



จุดยอดใน G จุดยอดใน I เส้นเชื่อมใน G เส้นเชื่อมใน I

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันซึ่งกำหนดชื่อใหม่นี้เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1.3.1

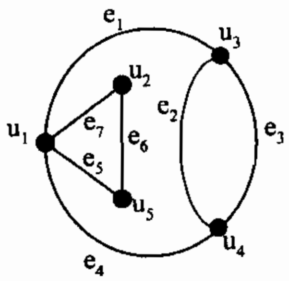
ถ้า G และ H เป็นกราฟที่มีเซตของจุด V(G) กับ V(H) และเซตของเส้นเชื่อม E(G) กับ E(H) กราฟ G สมสัณฐานกับ H ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อมีความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง $f = V(G) \longrightarrow V(H)$ และ $g = E(G) \longrightarrow E(H)$

ซึ่งรักษาฟังก์ชันจุดปลายเส้นเชื่อมของ G และ H โดยที่สำหรับทุกจุดยอด v ใน V(G) และเส้นเชื่อม e ใน E(G) จุดยอด v เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม e ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ f(v) เป็นจุดปลายของ g(e)

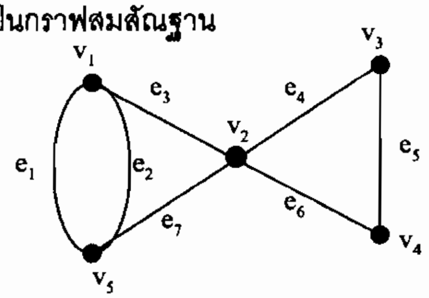
เห็นได้ชัดตามทฤษฎีนี้ว่ากราฟ G เหมือนกราฟ H ก็ต่อเมื่อ และต่อเมื่อจุดยอดกับเส้นเชื่อมของ G และ H สามารถจับคู่กันได้ในรูปฟังก์ชันทั่วถึงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one – to one onto function) โดยที่เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่สมนัยกันต้องมีความสมนัยด้วย

ตัวอย่างที่ 9

จะแสดงให้เห็นว่ากราฟทั้งสองต่อไปนี้เป็นกราฟสมสัณฐาน



G



H

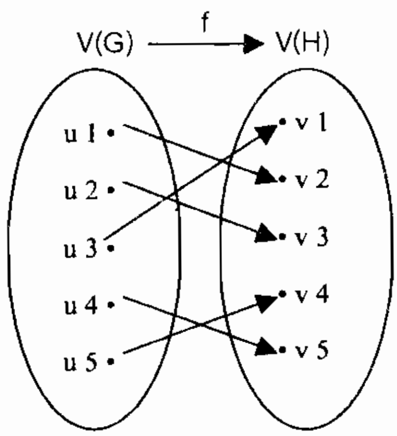
วิธีทำ

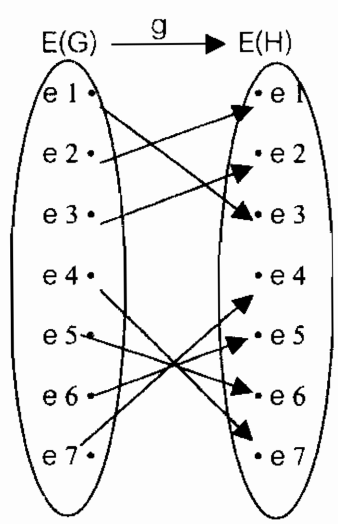
ในการพิจารณา ต้องหาฟังก์ชัน $f : V(G) \rightarrow V(H)$ $g : E(G) \rightarrow E(H)$ ที่เส้นเชื่อม e และจุดยอด u ทั้งหลายในเซต E(G) และ V(G) ซึ่งมี u เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม e ก็ต่อเมื่อ และต่อเมื่อ f(u) เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม g(e)

ในการหาฟังก์ชันดังกล่าวบางส่วนต้องใช้วิธีการลองผิดลองถูกและบางส่วนให้เหตุผลตามวิธีการคณิตศาสตร์นิรนัย เช่น การที่เส้นเชื่อม e_2 และ e_3 มีจุดปลายเหมือนกัน (เส้นเชื่อมทั้งสองขนานกัน) เส้นเชื่อม $g(e_2)$ และ $g(e_3)$ ต้องมีจุดปลายเหมือนกันด้วย (เส้นเชื่อมทั้งสองขนานกัน) ดังนั้น $g(e_2) = e'_2$ และ $g(e_3) = e'_1$ นอกจากนั้นจุดปลายของ e_2 กับ e_3 ต้องสมนัยกับจุดปลายของ e'_1 กับ e'_2 ดังนั้น $g(u_3) = v_1$ และ $g(u_4) = v_5$ หรือ $g(u_3) = v_5$ และ $g(u_4) = v_1$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า u_1 เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมไม่ซ้ำกัน 4 เส้น (e_1 , e_7 , e_5 และ e_4) ดังนั้น $g(u_1)$ ต้องเป็นจุดปลายของเส้นเชื่อม 4 เส้นด้วย (เพราะว่าทุกเส้นเชื่อมที่ประชิดกับ $g(u_1)$ เป็นภาพ (image) ใน g ของเส้นประชิดกับ v_1 และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง และหนึ่งต่อหนึ่ง) แต่จุดยอดใน H จุดเดียวที่มีเส้นเชื่อม 4 เส้นคือ v_2 ดังนั้น $f(u_1) = v_2$ ที่นี้ถ้า $f(u_3) = v_1$ และเนื่องจาก u_1 กับ u_3 เป็นจุดปลายของ e_1 ใน G ดังนั้น $f(u_1) = v_2$ และ $f(u_3) = v_1$ ต้องเป็นจุดปลายของ $g(e_1) = e'_3$

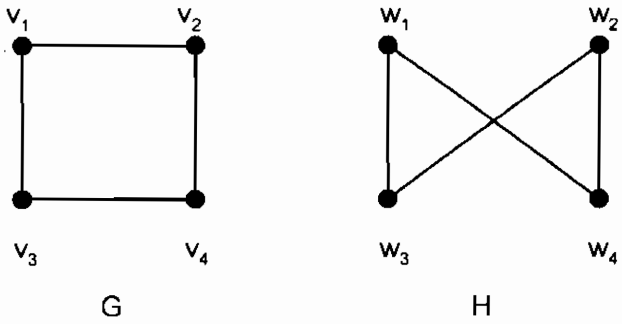
ด้วยการทำต่อไปในลักษณะนี้จะได้ฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดความเหมือนกันระหว่าง G กับ H ตัวอย่างของฟังก์ชันคู่หนึ่งคือ





ตัวอย่างที่ 10

จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ G และ H เป็นกราฟสมสัณฐาน



วิธีทำ

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชัน f ซึ่ง

$f(v_1) = w_1$ $\qquad$ $f(v_2) = w_4$

$f(v_3) = w_3$ $\qquad$ $f(v_4) = w_2$

เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดใน G กับจุดยอดใน H และความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งนี้ยังรักษาความประชิด ดังที่มีจุดประชิดใน G เป็น v_1 และ v_2, v_1 กับ v_3, v_2 กับ v_4 และ v_3 กับ v_4 และแต่ละคู่คือ

$f(v_1) = w_1$ และ $f(v_2) = w_4$

$f(v_1) = w_1$ และ $f(v_3) = w_3$

$f(v_2) = w_4$ และ $f(v_4) = w_2$

$f(v_3) = w_3$ และ $f(v_4) = w_2$

รักษาการประชิดใน H

ทฤษฎีบท 1.3.2

เซตของกราฟซึ่งเป็นแบบสมสัณฐาน จะมีความสัมพันธ์แบบสมมูล (equivalent) นั่นคือ มีการสมมาตร (Symmetric) การสะท้อน (reflexive) และการถ่ายทอด (transitive)

พิสูจน์ **การสะท้อน**

ถ้า G เป็นกราฟ และมีการส่งแบบ $f : V(G) \longrightarrow V(G)$

ให้ $f(v) = v$ สำหรับ v ทั้งหลายใน $V(G)$

แสดงว่า G สมสัณฐานกับ G ใน f

นั่นคือ สมสัณฐาน เป็นความสัมพันธ์แบบสะท้อน

การสมมาตร

ถ้า G สมสัณฐานกับ G_2 นั่นคือ f เป็นแบบสมสัณฐานระหว่าง G_1 กับ G_2

ให้ $f^{-1} : V(G_2) \longrightarrow V(G_1)$ เป็นการส่งแบบผกผัน โดยที่มี $f^{-1}(v_2) = v_1$ ถ้า $f(v_1) = v_2$ ดังนั้น f^{-1} เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(G_2)$ ไป $V(G_1)$ ถ้าจุด u_2 และ v_2 อยู่ใน $V(G_2)$ และ $f^{-1}(u_2) = u_1$ และ $f^{-1}(v_2) = v_1$ แสดงว่า $f(u_1) = u_2$ และ $f(v_1) = v_2$

ดังนั้น u_2 ประชิดกับ v_2 ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ $f(u_1)$ ประชิดกับ $f(v_1)$ และเพราะว่า G_1 เหมือนกับ G_2 ดังนั้น $f(u_1)$ ประชิดกับ $f(v_1)$ ก็ต่อเมื่อ $u_1 = f^{-1}(v_2)$ ประชิดกับ $v_1 = f^{-1}(v_2)$ และ u_2 ประชิดกับ v_2 ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(v_2)$ ประชิดกับ $f^{-1}(v_2)$ นั่นคือ G_2 สมสัณฐานกับ G_1 แสดงว่า "สมสัณฐาน" เป็นความสัมพันธ์แบบสมมาตร

การถ่ายทอด

ถ้า G_1 สมสัณฐานกับ G_2 และ G_2 สมสัณฐานกับ G_3

นั่นคือ

$$g : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$$

$$h : V(G_2) \longrightarrow V(G_3)$$

และการส่งแบบประกอบ $h \circ g$ จะเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(G_1)$ ไป $V(G_2)$

ถ้า u_1 และ v_1 เป็นจุดยอดในกราฟ G_1

ให้ $g(u_1) = u_2$ และ $g(v_1) = v_2$

$h(u_2) = u_3$ และ $h(v_2) = v_3$

เนื่องจาก g สมสัณฐานกับ h ดังนั้น u_1 ประชิดกับ v_1 ก็ต่อเมื่อ g (u_1) ประชิดกับ g (v_1) และ u_2 ประชิดกับ v_2 ก็ต่อเมื่อ h (u_2) ประชิดกับ $h(v_2)$
ดังนั้น u_1 ประชิดกับ v_1 ก็ต่อเมื่อ $u_3 = (h \circ g)(u_1)$ ประชิดกับ $v_3 = (h \circ g)(v_1)$ และ $h \circ g$ มีความสมสัณฐาน นั่นคือ G_1 สมสัณฐานกับ G_3

โดยทั่วไปมีขั้นตอนวิธีในการหาความสมสัณฐานของกราฟ G_1 กับ G_2 โดยใช้หลักการของฟังก์ชันทั่วถึงแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากเซตของจุดยอดใน G_1 ไปยังเซตของจุดยอดใน G_2 และจากเซตของเส้นเชื่อมใน G_1 ไปยังเซตของเส้นเชื่อมใน G_2 แล้วตรวจว่าเส้นเชื่อมแต่ละคู่ยังรักษาสภาวะฟังก์ชันจุดปลายเส้นเชื่อมของ G_1 และ G_2 หรือไม่ แต่ขั้นตอนวิธีจะใช้เวลามากเช่นถ้ากราฟ G_1 และ G_2 ต่างมีจุดยอด p จุดและเส้นเชื่อม q เส้น จำนวนความสมนัยจากจุดยอดไปยังจุดยอดคือ p! และความสมนัยจากเส้นเชื่อมไปยังเส้นเชื่อมคือ q! ซึ่งจำนวนคู่ของฟังก์ชันทั้งหมดที่ต้องตรวจคือ (p!) (q!) ดังนั้นถ้าสมมุติว่า p = 20 และ q = 20 จะมีคู่ของฟังก์ชันที่ต้องตรวจถึง (20!)(20!) ซึ่งแม้จะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ตรวจก็ต้องใช้เวลามากมาย

แม้ว่าจะยังไม่มีวิธีการตรวจที่มีประสิทธิภาพ รวดเร็ว ในการหาความสมสัณฐานของกราฟ แต่ก็มีวิธีการง่าย ๆ ในการตรวจสอบว่ากราฟไม่สมสัณฐานกันโดยพิจารณาว่ากราฟนั้นไม่มีสมบัติที่กราฟสมสัณฐานต้องมีสมบัตินี้เรียกว่า <u>การไม่แปรเปลี่ยน</u> ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

<u>การไม่แปรเปลี่ยน</u> (invariant)

ในการพิจารณากราฟ G_1 กับ G_2 จะเรียกว่า Q เป็นสมบัติสมสัณฐานไม่แปรเปลี่ยนก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อกราฟ G_1 มีสมบัติ Q และถ้ากราฟ G_2 สมสัณฐานกับ G_1 แล้ว G_2 มีสมบัติ Q ด้วย

ต่อไปนี้ คือ สมบัติการไม่แปรเปลี่ยนสำหรับกราฟสมสัณฐาน

1. มีจุดยอด n จุด
2. มีเส้นเชื่อม m เส้น
3. มีจุดยอดดีกรี k หนึ่งจุด
4. มีจุดยอดดีกรี k จำนวน m จุด
5. มีวงจรหนึ่งความยาว k
6. มีวงจรแบบง่ายหนึ่งวงจรความยาว k

7. มีวงจรแบบง่าย m วงจรความยาว k   8. เป็นกราฟเชื่อมโยง

9. มีวงจรแบบออยเลอร์   10. มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน

ตัวอย่างที่ 11

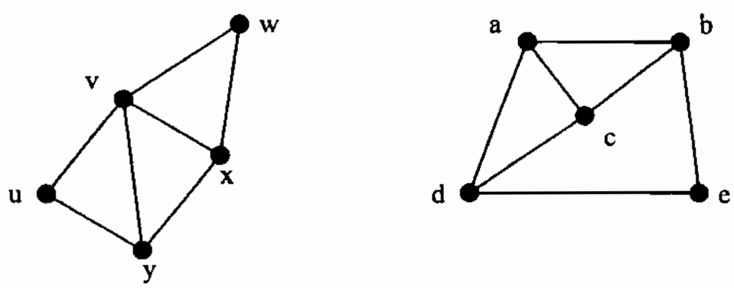
จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ 2 รูปต่อไปนี้ไม่สมสัณฐาน

G_1 G_2

วิธีทำ ตามคุณสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนเชิงสมสัณฐานของกราฟ กราฟ G_1 ต่างจาก G_2 เพราะ G_1 มีเส้นเชื่อม 9 เส้น ส่วน G_2 มีเส้นเชื่อม 8 เส้น

ตัวอย่างที่ 12

จงอธิบายให้เห็นว่ากราฟ G_3 และ G_4 ไม่สมสัณฐาน

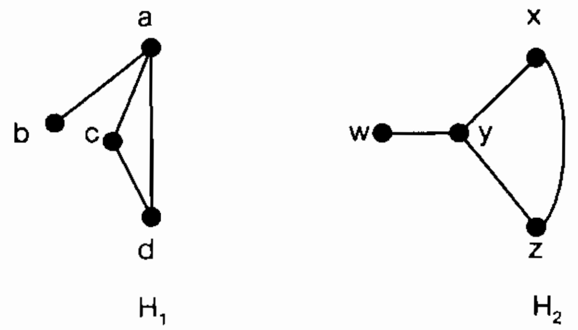


G 3   G 4

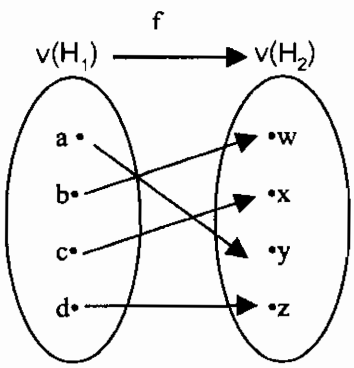
วิธีทำ จะเห็นได้ว่ากราฟ G_3 มีจำนวนจุดยอดเท่ากับกราฟ G_4 แต่ดีกรีของจุดยอด v ใน G_3 มีระดับขั้น 4 ซึ่ง G_4 ไม่มีจุดยอดที่มีระดับขั้น 4 ดังนั้นเมื่อใช้สมบัติการไม่แปรเปลี่ยนกราฟทั้งสองแตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 13

จงแสดงให้เห็นว่า กราฟ H_1 และ H_2 ต่อไปนี้สมสัณฐานกัน



วิธีทำ ให้ $f : v(H_1) \longrightarrow v(H_2)$ ตามทิศทางลูกศรต่อไปนี้

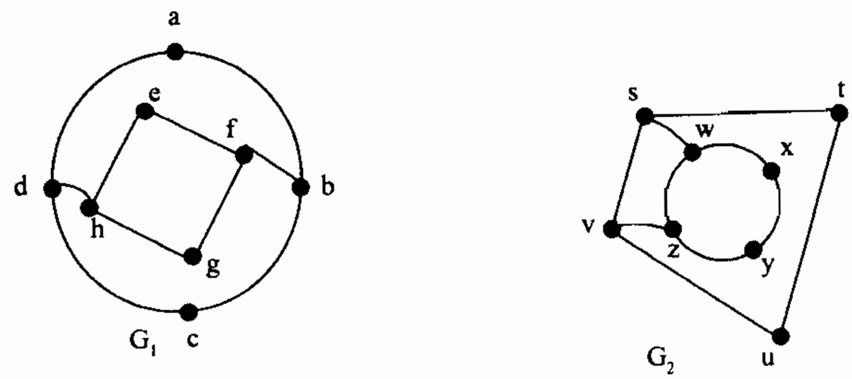


จะเห็นได้ว่า f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดใน H_1 กับ จุดยอดใน H_2 และรักษาความประชิดของจุดปลายและเส้นเชื่อมดังตาราง

เส้นเชื่อมของ H_1	เส้นเชื่อม W, H_2
(a,b)	(y,w) = (f (a) , f (b))
(a,c)	(y,x) = (f (a) , f (c))
(a,d)	(y,z) = (f (a) , f (d))
(c,d)	(x,z) = (f (c) , f (d))

ตัวอย่างที่ 14

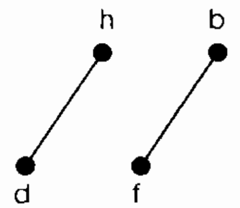
ให้พิจารณาว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นแบบสมสัณฐานหรือไม่



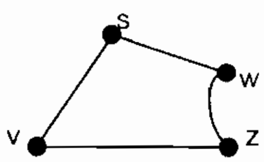
วิธีทำ

กราฟ G_1 และ G_2 ต่างก็มีจุดยอด 8 จุด และเส้นเชื่อม 10 เส้น นอกจากนั้นทั้ง G_1 และ G_2 มีจุดยอด 4 จุดซึ่งมีระดับขั้น 2 และจุดยอดอีก 4 จุดมีระดับขั้น 3 จากสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนเหล่านี้ กราฟ G_1 ควรจะสมสัณฐานกับกราฟ G_2

แต่กราฟ G_1 ต่างจาก G_2 เนื่องจากระดับชั้น 2 ของจุดยอด a ใน G_1 ต้องสมนัยกับระดับชั้นของจุดยอด t, u, x หรือ y ใน G_2 ที่มีระดับชั้น 2 เหมือนกัน แต่จุดทั้งสี่ซึ่งมีระดับชั้น 2 ใน G_2 เหล่านี้ประชิดกับจุดยอดระดับชั้น 2 ใน G_2 ต่างจากจุดยอด a ใน G_1 ที่ประชิดกับจุดยอดระดับชั้น 3 นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยของ G_1 กับ G_2 ประกอบด้วยจุดยอดระดับชั้น 3 ดังนั้น เส้นเชื่อมที่โยงจุดยอดเหล่านี้ต้องเหมือนกัน ถ้ากราฟทั้งสองสมสัณฐานกัน แต่จะเห็นได้จากรูปของกราฟย่อยข้างล่างว่าไม่เหมือนกัน



กราฟย่อยของ G_1

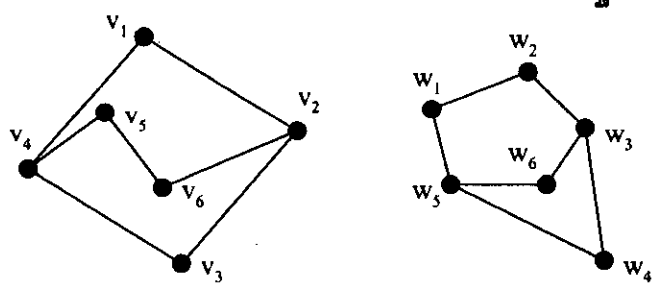


กราฟย่อยของ G_2

สรุปได้ว่า กราฟ G_1 ไม่สมสัณฐานกับ G_2

<u>ตัวอย่างที่ 15</u>

ให้พิจารณาว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นแบบสมสัณฐานหรือไม่



G_1 G_2

<u>วิธีทำ</u>

G_1 และ G_2 มีจุดยอด 6 จุด และเส้นเชื่อม 7 เส้น ทั้ง G_1 และ G_2 มีจุดยอด 4 จุด ซึ่งระดับชั้น 2 และจุดยอด 2 จุด ซึ่งระดับชั้น 3 นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยของ G_1 และ G_2 ประกอบด้วยจุดยอดทั้งหมดซึ่งมีระดับชั้น 2 และเส้นเชื่อมที่โยงจุดยอดเหล่านี้มีความสมสัณฐานแสดงว่าทั้ง G_1 และ G_2 มีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยน

<u>เพื่อหาฟังก์ชันสมสัณฐาน f</u> มีลำดับชั้นของการพิจารณาดังนี้

เพราะว่า $\deg(v_1) = 2$ และ v_1 ไม่ประชิดกับจุดยอดที่มีระดับชั้น 2 ภาพของ v_1 จะต้องเป็นจุดยอดซึ่งมีระดับชั้น 2 ใน G_2 ที่ไม่ประชิดกับจุดยอดระดับชั้น 2 นั่นคือ จะต้องเป็น w_4 หรือ w_6 ถ้าให้ $f(v_1) = w_6$ (อาจจะให้ $f(v_1) = w_4$ ก็ได้) เพราะว่า v_2 ประชิดกับ v_1 ภาพที่เป็นไปได้ของ v_2 คือ w_3 กับ w_5 ให้ $f(v_2) = w_3$ ใช้หลักของการประชิดของ จุดยอดกับระดับชั้นเช่นนี้ต่อไป จะได้ว่า $f(v_3) = w_4$, $f(v_4) = w_5$, $f(v_5) = w_1$ และ $f(v_6) = w_2$ ซึ่งเป็นความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซตของจุดยอดใน G_1 กับเซตของจุดยอดใน G_2 นั่นคือ $f(v_1) = w_6$, $f(v_2) = w_3$, $f(v_3) = w_4$, $f(v_4) = w_5$, $f(v_5) = w_1$ และ $f(v_6) = w_2$

<u>เมื่อตรวจการรักษาสภาวะเส้นเชื่อมของ f</u>

ใช้เมทริกซ์ประชิดของ G_1 กับ G_2 จะเห็นได้ว่า

$$A_{G1} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ เท่ากับ } A_{G2} = \begin{array}{c} \\ w_6 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w_6 & w_3 & w_4 & w_5 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

เนื่องจาก $A_{G1} = A_{G2}$ แสดงว่า f รักษาสภาวะเส้นเชื่อม นั่นคือ f เป็นแบบสมสัณฐาน ดังนั้น G_1 สมสัณฐานกับ G_2

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า f ไม่เป็นแบบสมสัณฐาน จะยังไม่กำหนดว่า G_1 กับ G_2 ไม่สมสัณฐาน เพราะว่าความสมนัยกันของจุดยอดระหว่าง G_1 กับ G_2 อาจจะเป็นแบบสมสัณฐาน

ต่อไปเป็นทฤษฎีที่กำหนด<u>เงื่อนไขจำเป็น</u> สำหรับกราฟสมสัณฐาน 2 รูป <u>แต่ยังไม่เพียงพอ</u> เนื่องจากจุดยอดของกราฟทั้งสองแม้จะมีระดับขั้นเท่ากันแต่อาจจะไม่เป็นกราฟสมสัณฐาน

<u>ทฤษฎีบทที่ 5</u> (เงื่อนไขจำเป็น)

ถ้ากราฟ G สมสัณฐานกับกราฟ H ระดับขั้นของจุดยอดใน G ต้องเท่ากับระดับขั้นของจุดยอดใน H

<u>พิสูจน์</u>

เพราะว่า G สมสัณฐานกับ H ดังนั้น จึงมีความสัมพันธ์ $f : V(G) \longrightarrow V(H)$

ถ้า u เป็นจุดยอดใด ๆ ใน G ซึ่ง deg u = n (n จำนวนเต็มบวก) และมีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v (นั่นคือ f(u) = v)

เพื่อแสดงให้เห็นว่า deg v = n เนื่องจาก deg u = n ดังนั้นกราฟ G มีจุดยอด $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ ซึ่งประชิดกับจุดยอด u ส่วนจุดยอดอื่น ๆ ไม่ประชิดกับจุดยอด u

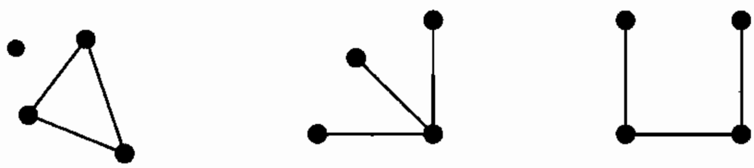
ให้ $f(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ ดังนั้น จุดยอด v ประชิดกับจุดยอด $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ เพราะว่า f เป็นความสัมพันธ์แบบสมสัณฐาน และเฉพาะจุดเหล่านี้เท่านั้นที่ประชิดกับจุด v เพราะว่าในกราฟ G จุดยอด u ประชิดกับจุดยอด x ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อจุดยอด v ประชิดกับ f(x) ใน H ระดับขั้นของจุดยอด v = n เพราะจุดยอดใน G และภาพของ G ใน H มีระดับขั้นเท่ากัน

ตามทฤษฎีจะเห็นว่า

กราฟอันดับ 1 (ขนาดเป็นศูนย์) เป็นกราฟสมสัณฐาน

กราฟอันดับ 2 ที่มีขนาดเป็นศูนย์ และหนึ่ง เป็นกราฟสมสัณฐาน

กราฟอันดับ 4 และขนาด 3 มี 3 แบบ คือ



แบบ 1 แบบ 2 แบบ 3

ซึ่งแต่ละแบบไม่สมสัณฐาน แต่กราฟอันดับ 4 และ ขนาด 3 อื่น ๆ จะสมสัณฐานกับกราฟแบบหนึ่งแบบใดใน 3 แบบนี้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ในกลุ่มกราฟอันดับ 4 ขนาด 3 จะมีเซตของกราฟสมสัณฐาน 3 ชุด ดังนั้น ถ้ามีกราฟอันดับ 4 ขนาด 3 อื่น ๆ ตั้งแต่ 4 รูปขึ้นไป จะมีกราฟ 2 รูป ขึ้นไปที่เป็นกราฟของเซตสมสัณฐานเดียวกัน คำอธิบายนี้ชี้ให้เห็นผลลัพธ์ของหลักการช่องนกพิราบ (pigeonhole principle) อันมีชื่อเสียง

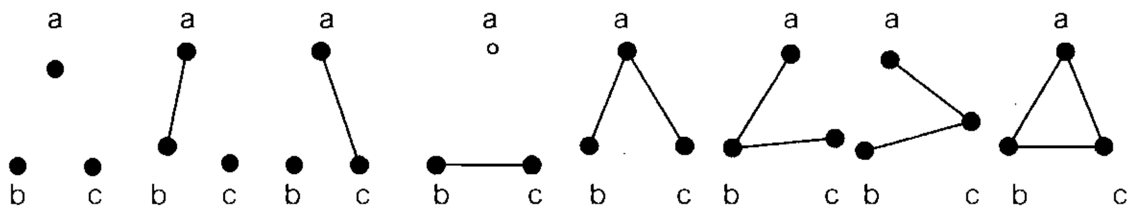
หลักการช่องนกพิราบ

ถ้า S เป็นเซตของสมาชิกจำนวน n และ S_1 , S_2 ,....... S_k เป็นเซตย่อย k เซตที่แบ่งจาก S จะพบว่ามีเซตย่อยอย่างน้อยที่สุด 1 เซตย่อย S_i ที่ 1 < i < n ซึ่งมีสมาชิกอย่างน้อยที่สุด จำนวน $\{\frac{n}{k}\}$ (หมายเหตุ { x } หมายถึง จำนวนเต็มน้อยที่สุดซึ่งเท่ากับ x หรือมากกว่า)

ดังนั้น ถ้ามีเซตของกราฟสมสัณฐานอันดับ 4 ขนาด 3 จำนวน 3 ชุด (k = 3) และมีกราฟอันดับ 4 ขนาด 3 จำนวน 4 รูป (n = 4) จะพบว่ามีกราฟอย่างน้อยที่สุด จำนวน $\{\frac{4}{3}\} = 2$ รูปที่อยู่ในเซตของกราฟสมสัณฐานเดียวกัน

1.4 การนับจำนวนกราฟ

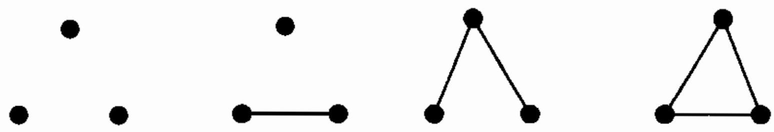
การนับจำนวนกราฟที่มีอักษรกำกับจุดยอด จะนับเฉพาะกราฟที่ไม่สมสัณฐานตามอักษรซึ่งกำกับไว้ที่จุดยอด เช่น กราฟอันดับ 3 ซึ่งมีอักษรกำกับจุดยอดจะมีกราฟจำนวน 8 รูป ที่ไม่สมสัณฐาน



วิธีการหาจำนวนของกราฟอันดับ n ที่มีอักษรกำกับจุดยอดสามารถทำได้ง่ายจากทฤษฎีที่พิสูจน์ไว้แล้วว่ากราฟ G ใด ๆ จะมีดีกรีของจุดยอดเป็นสองเท่าของจำนวนเส้น และตามผลลัพธ์ที่ได้ตามมาในข้อ 3 จะมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนที่เป็นไปได้ คือ $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้น ซึ่งแต่ละเส้นเชื่อม อาจจะปรากฏหรือไม่ปรากฏ ดังนั้น จำนวนกราฟที่ต้องการคือ $2^{n(n-1)/2}$ ตามผลลัพธ์นี้ถ้า n ≤ 6 จะได้จำนวนนับดังนี้

n	1	2	3	4	5	6
กราฟมีอักษรกำกับจุดยอด	1	2	8	64	1024	32768

ส่วนวิธีการนับจำนวนกราฟที่ไม่มีอักษรกำกับจุดยอด จะนับเฉพาะกราฟที่ไม่สมสัณฐานเมื่อไม่มีอักษรกำกับ เช่น กราฟอันดับ 3 จะมีกราฟซึ่งไม่สมสัณฐาน เพียง 4 รูป คือ



การนับจำนวนกราฟแบบนี้เมื่อกำหนดจุดยอดไม่เกิน 6 จุด และเส้นเชื่อมหรือดีกรีของจุด จะหาได้โดยง่าย ส่วนในกรณีที่จำนวนจุดมากกว่า 6 จุด มีสูตรทั่วไปของ จอร์จ ไปลยา กำหนดจำนวนของกราฟที่ไม่มีอักษรกำกับสำหรับจุดยอด 1 – 8 จุด ดังนี้

n	1	2	3	4	5	6	7	8
กราฟ	1	2	4	11	34	156	1044	12346

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

แบบฝึกหัด

1. ให้เขียนกราฟจากเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 เซตของจุดยอด V = { a, b, c, x, y, z }

   เซตของเส้นเชื่อม E = { ax, by, cz, ab, ac, az, by}

   1.2 เซตของจุดยอด V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

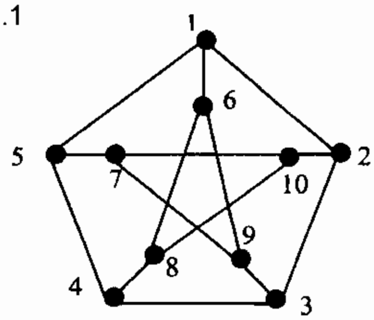
   เซตของเส้นเชื่อม E = { 12, 23, 24, 34, 35, 46, 47 }

   1.3 เซตของจุดยอด V = { A, B, C, D, F, G }

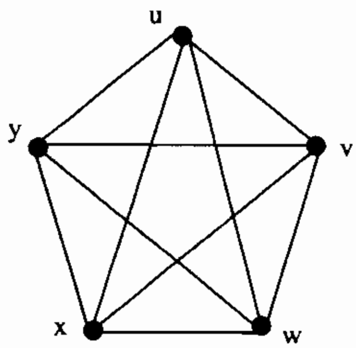
   เซตของเส้นเชื่อม E = { AB, BF, CD, AF, CG, BD, BC }

2. ให้หาเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมจากกราฟต่อไปนี้

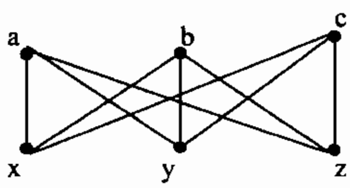
2.1



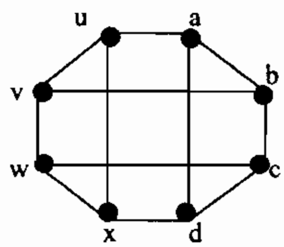
2.2



2.3



2.4



3. ให้ G เป็นกราฟอันดับ 3 กราฟ G จะมีขนาดเท่าใด

4. ถ้า G_1 เป็นกราฟอันดับ 3 และกำหนดว่าทุก 2 จุดใน G เป็นจุดประชิด และทุก 2 เส้นใน G เป็นเส้นประชิด ให้หากราฟ G

5. ถ้า G เป็นกราฟอันดับ n ซึ่ง $n \geq 2$ G จะมีขนาดต่ำสุดได้เท่าใด ถ้าจุดยอดจุดหนึ่งใน G ประชิดกับจุดอื่นทั้งหมด

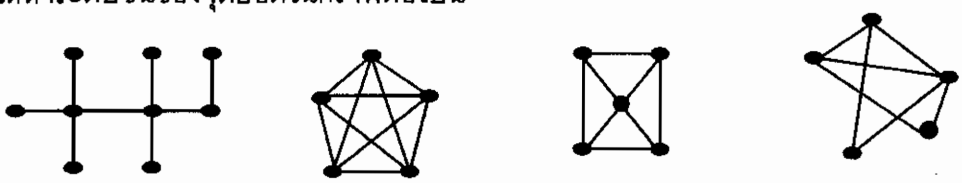
6. ให้ G เป็นกราฟใด ๆ ที่มีอันดับ 4 และระดับชั้นของจุดยอดทั้ง 4 เป็น 1, 2, 3, 4 ให้เขียนกราฟ G และหาจำนวนเส้นเชื่อมใน G

7. ให้เขียนกราฟอับอับ 4 ซึ่งมีระดับชั้นของจุดยอดใน 1, 2, 3 และ 4

8. ให้เขียนกราฟเชื่อมโยงอันดับ 8 ที่มีระดับชั้นของจุดยอดคือ

   8.1 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6   8.2 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5

9. ให้หาระดับชั้นของจุดยอดในกราฟต่อไปนี้

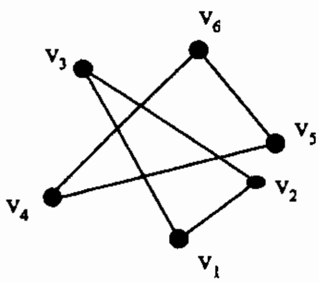


9.1   9.2   9.3   9.4

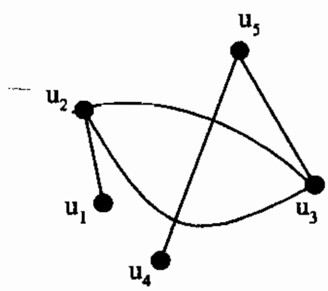
10. ให้แสดงว่ากราฟในข้อ 9.1 – 9.4 มี $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$

11. ให้หาจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟและพหุกราฟต่อไปนี้

11.1

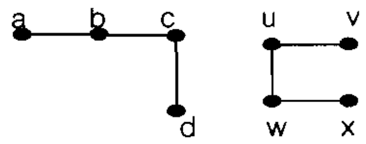


11.2



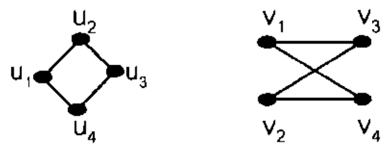
12. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ G และ H ต่อไปนี้สมสัณฐานหรือไม่ ถ้าเป็นกราฟสมสัณฐานให้แสดงความสัมพันธ์ $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ ที่เป็นความสมสัณฐาน ถ้าไม่เป็นกราฟสมสัณฐาน ให้อธิบายว่ามีคุณสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนข้อใดที่ต่างกัน

12.1



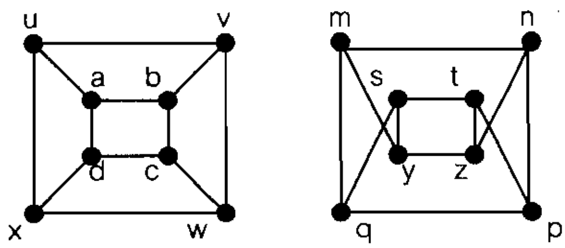
G H

12.2



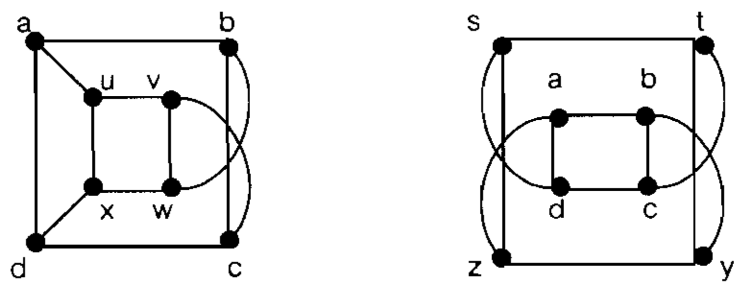
G H

12.3



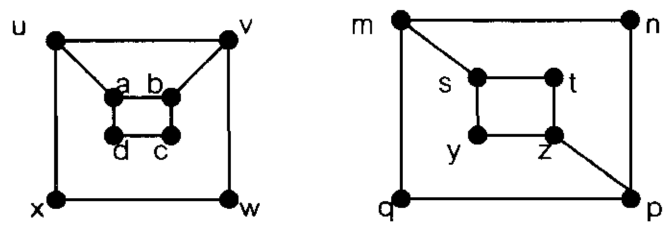
G H

12.4



G H

12.5



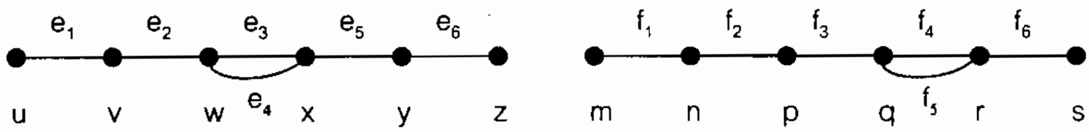
G H

13. ให้เขียนกราฟซึ่งมีจุดยอด 3 จุด และไม่สมสัณฐาน

14. ให้เขียนกราฟซึ่งมีจุดยอด 3 จุด เส้นเชื่อมไม่เกิน 2 เส้น และไม่สมสัณฐาน

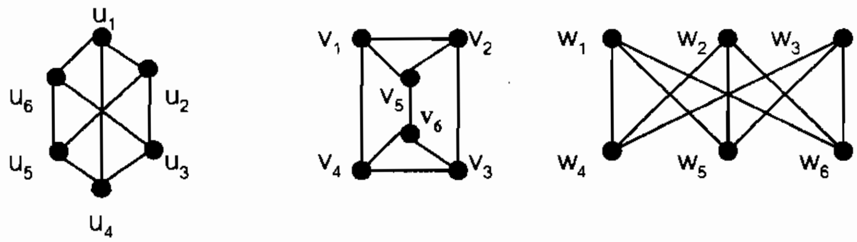
15. ให้เขียนกราฟซึ่งมีจุดยอด 6 จุด ทุกจุดมีดีกรี 2 และไม่สมสัณฐาน

16. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟต่อไปนี้ไม่สมสัณฐาน



<u>ข้อแนะนำ</u> (สมมุติว่ากราฟทั้งสองสมสัณฐาน จะทำให้ได้ข้อขัดแย้ง)

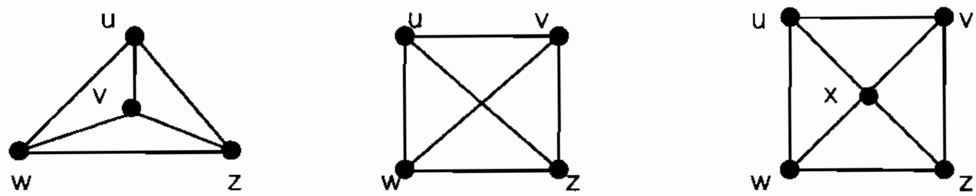
17. ข้อพิสูจน์ว่ากราฟอันดับ 4 ขนาด 2 จำนวน 3 รูปต่อไปนี้ คือ H_1 กับ H_2 และ H_3 มีกราฟอย่างน้อย 2 รูปที่สมสัณฐาน



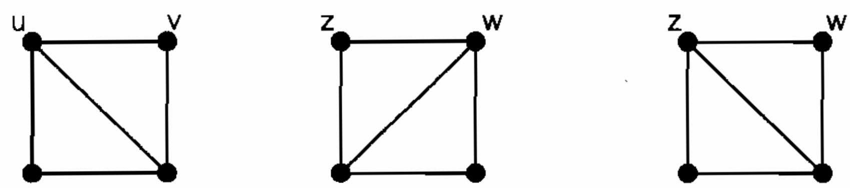
<u>ข้อแนะนำ</u> (กราฟอันดับ 4 ขนาด 2 ต้องมีเส้นเชื่อม 2 เส้น ที่ประชิดหรือไม่ประชิดกัน)

18. กราฟข้างล่างนี้มี 2 รูป ที่เป็นแบบสมสัณฐาน ส่วนอีกรูปหนึ่งไม่เป็นแบบสมสัณฐาน ให้หากราฟที่ไม่สมสัณฐาน และอธิบายเหตุผลที่ไม่สมสัณฐาน

18.1

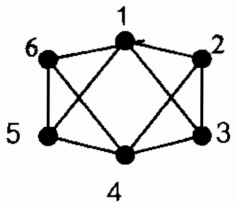


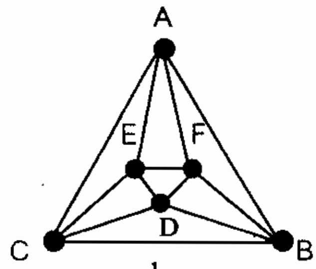
18.2



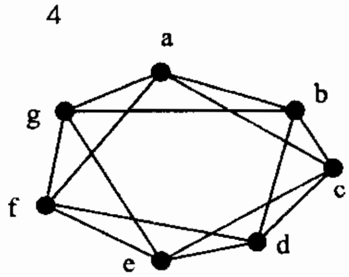
19. ให้กำหนดชื่อจุดยอดใหม่ เพื่อให้กราฟ 2 รูป เป็นแบบสมสัณฐาน

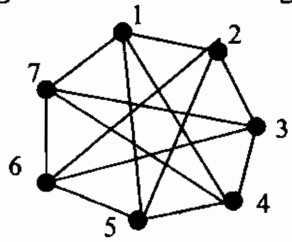
19.1





19.2





20. ให้เขียนกราฟเชื่อมโยงจุดยอด 4 จุด ซึ่งไม่สมสัณฐาน

21. กราฟ G สมสัณฐานกับกราฟย่อยของตนเองได้หรือไม่ (ยกเว้นกราฟ G เอง)

บทที่ 2
กราฟแบบต่าง ๆ

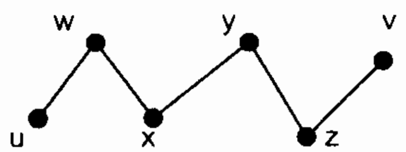
2.1 <u>บทนิยาม</u>

ทฤษฎีกราฟได้รับการนำไปประยุกต์ในหลายด้านและส่วนมากเกี่ยวข้องกับการเริ่มจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เช่น ให้หาระยะทางซึ่งสั้นที่สุดในการเดินทางจากสถานที่หนึ่งไปยังอีกสถานที่หนึ่ง ให้กระแสไฟฟ้าระหว่างจุดสองจุดหรือให้หาเวลาซึ่งสั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุด เพื่อให้มีความชัดเจนเกี่ยวกับแนวความคิดดังกล่าว จำเป็นต้องมีบทนิยามต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 2.1.1</u>

แนวเดินในกราฟ G ระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด v คือลำดับของจุดและเส้นใน G ที่สลับกัน โดยเริ่มต้นที่จุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> แนวเดิน u, uw, w, wx, x, xy, y, yz, z, zv, v



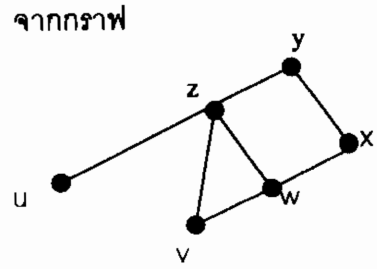
เรียกว่าแนวเดินระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด v ในการเขียนแนวเดินอาจใช้เฉพาะจุดได้ เช่น แนวเดินระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด v เขียนเฉพาะจุดได้ คือ

u, w, x, y, z, v

<u>บทนิยาม 2.1.2</u>

ความยาวของแนวเดินระหว่างจุดยอดสองจุด คือ จำนวนเส้นระหว่างจุดยอดทั้งสองนั้น

ตัวอย่างที่ 2 จากกราฟ



จะเห็นได้ว่าแนวเดิน u, z, v, w, z, y, x มีความยาวเท่ากับ 6 ถ้าให้ n = ความยาวของแนวเดิน ทางเดิน v, w, x, y, z, w, v, z, u มีความยาว n = 8 ถ้า n = 0 แสดงว่าไม่มีแนวเดิน

2.2 **รอยเดิน**

บทนิยาม 2.2.1

รอยเดินระหว่างจุดยอดสองจุด คือ แนวเดินระหว่างจุดยอดทั้งสอง ซึ่งไม่ซ้ำเส้นเชื่อม

ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟในตัวอย่างที่ 2 แนวเดิน u, z, v, w, x, y เป็นรอยเดินจาก u ถึง y แต่แนวเดิน u, z, v, w, x, w, z ไม่เป็นรอยเดินจาก u ถึง z เพราะซ้ำที่เส้นเชื่อม wx

2.3 **วิถี**

บทนิยาม 2.3.1

วิถีระหว่างจุดยอดสองจุดคือแนวเดินระหว่างจุดทั้งสองซึ่งไม่ซ้ำจุด

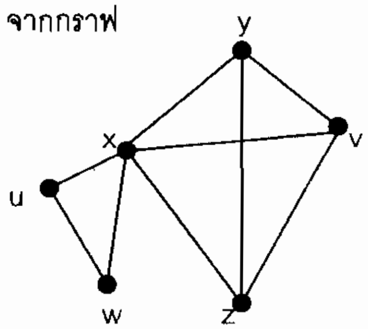
ตัวอย่างที่ 4 จากกราฟในตัวอย่างที่ 2 แนวเดิน u, z, v, w, x, y เป็นวิถีจาก u ถึง y แต่แนวเดิน u, z, v, w, x, w ไม่เป็นวิถีเพราะซ้ำที่จุดยอด w

2.4 **<u>วงจร</u>**

<u>บทนิยาม 2.4.1</u>

รอยเดินจากจุด u ถึง v ซึ่ง u = v และมีเส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด 3 เส้น เรียกว่า **วงจร**

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จากกราฟ



จะเห็นได้ว่ารอยเดิน x, z, v, y, x เป็นวงจร หรือ รอยเดิน v, z, y, x, u, w, x, v เป็นวงจร

2.5 **<u>วงเวียน</u>**

<u>บทนิยาม 2.5.1</u>

วงเวียน คือ วงจรซึ่งไม่ซ้ำจุด

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> ตามกราฟในตัวอย่างที่ 5

รอยเดิน x, z, v, y, x เป็นวงเวียน

แต่รอยเดิน v, z, y, x, u, w, x, v ไม่เป็นวงเวียน

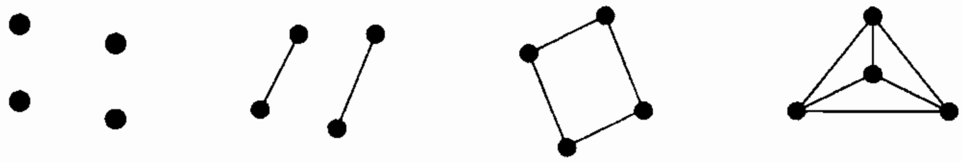
2.5 <u>กราฟแบบต่าง ๆ</u> (Types of Graphs)

ต่อไปนี้เป็นกราฟแบบต่าง ๆ ที่สำคัญซึ่งพบทั้งในแบบทั่วไปและประยุกต์

บทนิยาม 2.6.1

กราฟ G เรียกว่า กราฟปกติดีกรี r ถ้าทุกจุดยอดใน G มีดีกรีเท่ากับ r

ตัวอย่างที่ 7 กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟปกติอันดับ 4 ซึ่งมีดีกรี r ต่าง ๆ กัน

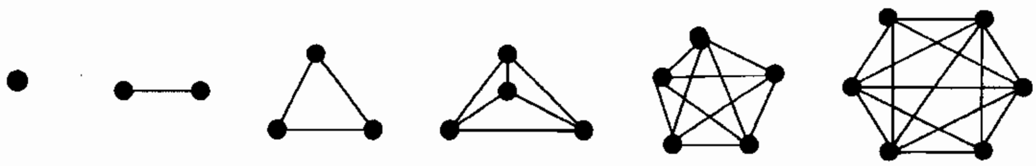


r=0 r=1 r=2 r=3

บทนิยาม 2.6.2

กราฟ G เรียกว่า เป็นกราฟสมบูรณ์ ถ้าจุดยอดทุก ๆ 2 จุดใน G เป็นจุดประชิด กราฟสมบูรณ์ซึ่งมีจุดยอด n จุดจะใช้ สัญลักษณ์ K_n

ตัวอย่างที่ 8 กราฟสมบูรณ์อันดับต่าง ๆ



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

จะเห็นได้ว่ากราฟสมบูรณ์ K_n คือกราฟปกติดีกรี $n-1$ และเมื่อใช้ผลลัพธ์ข้อ 8 ของทฤษฎีบทความสัมพันธ์ระหว่างดีกรีจุดยอดกับเส้นเชื่อมจะได้ว่า กราฟ K_n มีจำนวนเส้นเชื่อม $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้น

บทนิยาม 2.6.3

กราฟชัด (trivial graph) คือ กราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อม กราฟชัดอันดับ n ใช้สัญลักษณ์ N_n

ตัวอย่างที่ 9 กราฟในตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกราฟชัดอันดับ 1 ถึง 5

N_1 N_2 N_3 N_4 N_5

ข้อสังเกต กราฟชัดเป็นกราฟปกติระดับขั้นศูนย์

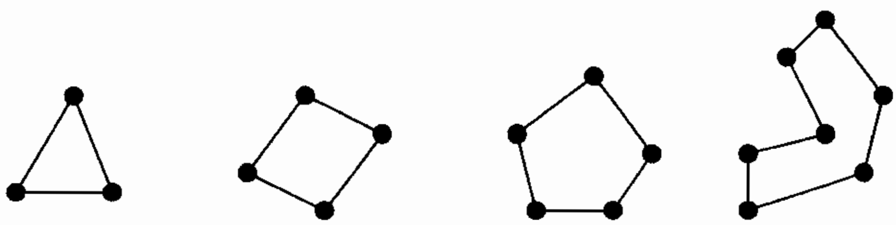
บทนิยาม 2.6.4

กราฟศูนย์ (empty graph) คือ กราฟที่ไม่มีจุดยอดและไม่มีเส้นเชื่อม

บทนิยาม 2.2.5

กราฟวงเวียน คือ กราฟที่มีวงเวียนเพียง 1 วงเวียน กราฟวงเวียนอันดับ n ใช้สัญลักษณ์ C_n

ตัวอย่างที่ 10 กราฟในตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกราฟวงเวียนอันดับ 3 ถึง 6



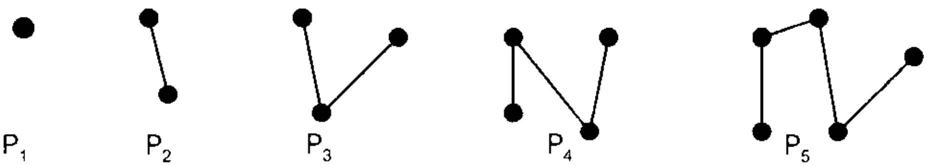
C_3 C_4 C_5 C_6

<u>บทนิยาม 2.6.6</u>

กราฟวิถี คือ กราฟที่มีวิถีเพียง 1 วิถี กราฟวิถีอันดับ n ใช้สัญลักษณ์ P_n

<u>ตัวอย่างที่ 11</u>

กราฟในตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกราฟวิถีอันดับ 1 ถึง 5



P_1 P_2 P_3 P_4 P_5

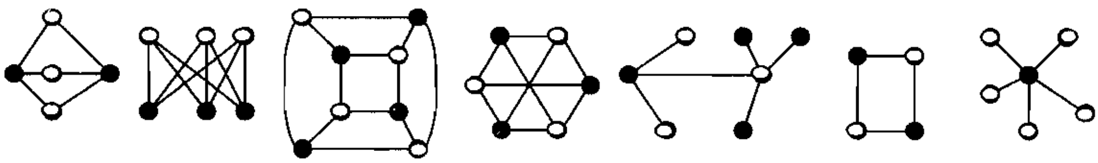
<u>ข้อสังเกต</u> กราฟวิถี P_n มีเส้นเชื่อม $n-1$ เส้น และจะได้จากกราฟ C_n เมื่อลบเส้นเชื่อมออก 1 เส้น

<u>บทนิยาม 2.6.7</u>

กราฟสองส่วน (bipartite graph) คือ กราฟที่จุดยอด สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 เซต โดยที่จุดยอดในเซตเดียวกันไม่มีเส้นเชื่อม แต่มีเส้นเชื่อมกับจุดยอดที่อยู่ต่างเซตกัน ใช้สัญลักษณ์ $K_{m,n}$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u>

กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟสองส่วน



$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{4,4}$ $K_{3,3}$ $K_{3,4}$ $K_{2,2}$ $K_{1,5}$

แสดงให้เห็นจุดยอดที่ต่างเซตกันด้วยจุดโปร่ง และจุดทึบ

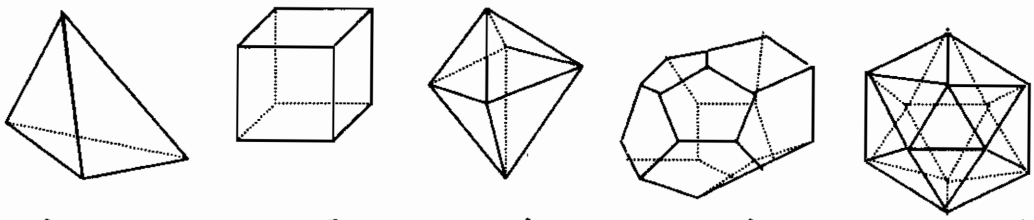
<u>ข้อสังเกต</u>

จะเห็นได้ว่า $K_{m,n}$ มีจุดยอดจำนวน $m + n$ จุด (จุดยอด m จุดซึ่งมีดีกรี และจุดยอด n จุดซึ่งมีดีกรี m)

<u>บทนิยาม 2.6.8</u>

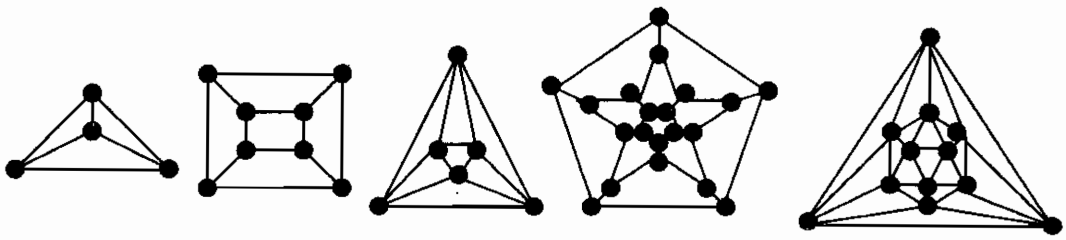
กราฟแบบเพลโต (Platonic graph) คือ กราฟที่กำหนดจุดยอดและเส้นเชื่อมแทนจุดและเส้นของรูปทรงตันแบบเพลโต

รูปทรงตันแบบเพลโตมี 5 แบบ คือ



ทรง 4 หน้า ลูกบาศก์ ทรง 8 หน้า ทรง 12 หน้า ทรง 20 หน้า

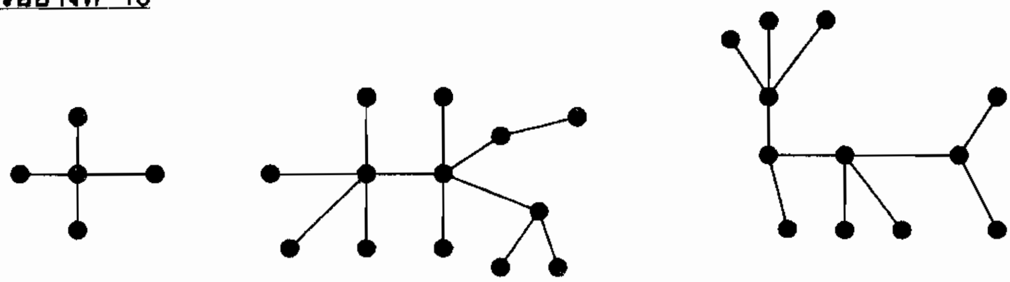
เมื่อกำหนดให้จุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟแทนจุดและเส้นของรูปทรงตัน จะได้กราฟแบบเพลโตทั้ง 5 แบบ ดังนี้



<u>บทนิยาม 2.6.9</u>

กราฟต้นไม้ (tree) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวงเวียน

ตัวอย่างที่ 13



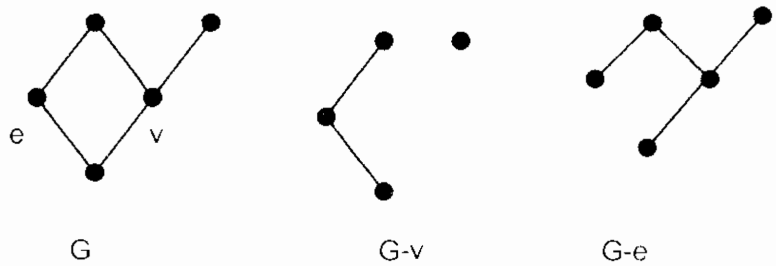
กราฟต้นไม้

บทนิยาม 2.6.10

กราฟย่อย คือ กราฟซึ่งเกิดจากเซตย่อยของจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟใหญ่ ดังนั้น ถ้า H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G จะได้ $V(H) \leq V(G)$ และ $E(H) \leq E(G)$

กราฟย่อยแบบง่ายที่สุด คือ กราฟย่อยซึ่งได้จากการลบจุดยอดหรือเส้นเชื่อมออกจากกราฟ เช่น ถ้า v เป็นจุดยอดในกราฟ G และ ขนาดของกราฟ G มากกว่า หรือเท่ากับ 2 จุด แล้ว $G - v$ คือ กราฟย่อยของ G ซึ่งมีเซตของจุดเป็น $V(G) - \{v\}$ และเซตของเส้นเชื่อมคือเซตของเส้นเชื่อมในกราฟ G ทั้งหมดยกเว้นเส้นที่โยงกับจุด V ในทำนองเดียวกัน ถ้า e เป็นเส้นในกราฟ G กราฟ $G - e$ คือ กราฟย่อยที่มีเซตของจุดเป็น $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อมเป็น $E(G) - \{e\}$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

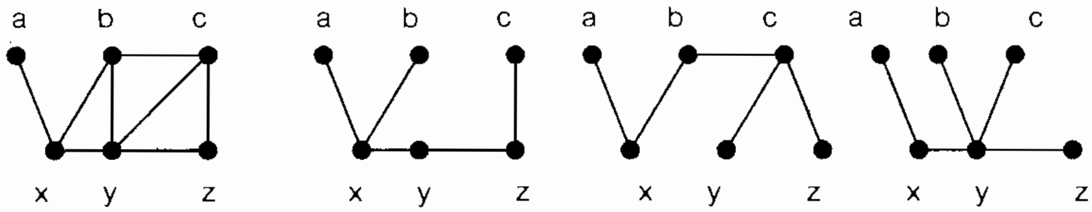
ตัวอย่างที่ 14



<u>บทนิยาม</u> 2.6.11

กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม (spanning tree) คือ กราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ซึ่งรวมจุดยอดทุกจุดใน G และไม่มีวงเวียน

<u>ตัวอย่างที่</u> 15

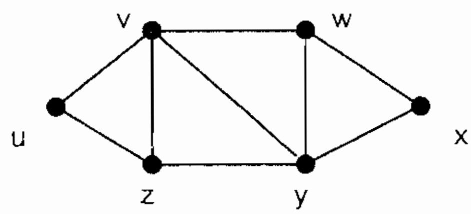


กราฟต้นไม้แบบต่าง ๆ

◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

แบบฝึกหัด

1. จากกราฟ



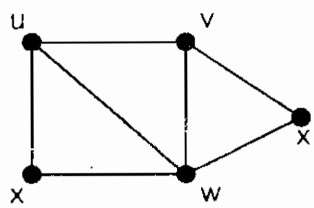
1.1 xyzvy เป็น......... ซึ่งมีความยาว ......หน่วย จากจุดยอด .... ถึงจุดยอด.......

1.2 vuzvw เป็น......... ซึ่งมีความยาว ......หน่วย จากจุดยอด .... ถึงจุดยอด......

1.3 vywxyv เป็น......... ซึ่งมีความยาว ......หน่วย จากจุดยอด .... ถึงจุดยอด.......

1.4 uvwxyzu เป็น......... ซึ่งมีความยาว ......หน่วย จากจุดยอด .... ถึงจุดยอด.......

2. จากกราฟ



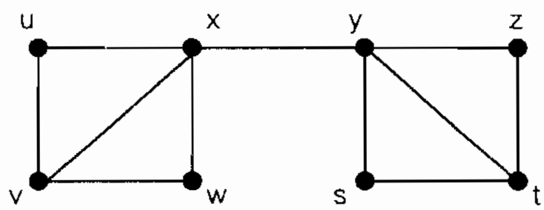
2.1 ให้หาทางเดินความยาว 6 หน่วย จาก u ถึง x

2.2 ให้หาวงจรซึ่งมีความยาว 5 หน่วย และ 6 หน่วย

2.3 ให้หาวงเวียนซึ่งมีความยาว 3 หน่วย 4 หน่วย และ 5 หน่วย

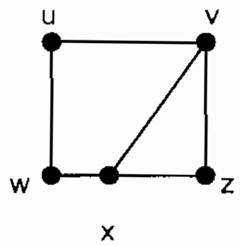
2.4 ให้หาวิถีซึ่งมีความยาวสูงสุด

3. จากกราฟ



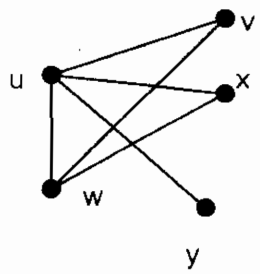
ให้หาวิถีทั้งหลายระหว่างจุดยอด u กับจุดยอด z

4. จากกราฟ



ให้หาวิถีทั้งหมดจาก u ถึง y

5. จากกราฟ G ที่กำหนดให้



ให้หา

5.1 รอยเดิน

5.2 วงเวียน

5.3 วิถีเปิด และวิถีปิด ที่ไม่ใช่วงเวียน

6. ให้เขียนกราฟต่อไปนี้

6.1 K_8 6.2 C_8 6.3 $K_{4,4}$ 6.4 N_8 6.5 P_8

7. ให้หาอันดับ ขนาด และดีกรีของจุดยอด ของกราฟต่าง ๆ ดังตาราง

กราฟแบบต่าง ๆ

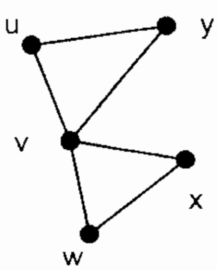
จำนวน	K_9	N_9	C_9	$K_{9,9}$	ทรง 4 หน้า	ลูกบาศก์	ทรง 12 หน้า	ทรง 20 หน้า
อันดับ ขนาด ดีกรีของจุด								

8. จงแสดงให้เห็นว่าในกราฟสองส่วนใด ๆ ทุกวงเวียนมีความยาวเป็นจำนวนคู่
9. ความยาวของวงเวียนซึ่งสั้นที่สุดของกราฟเรียกว่า <u>เกอร์ธ</u> (girth) ให้หาเกอร์ธ ของกราฟต่อไปนี้

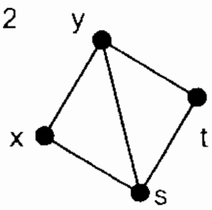
   9.1 K_9 9.2 $K_{5,8}$ 9.3 กราฟแบบของเพลโต
10. ความยาวของวงเวียนซึ่งยาวที่สุดของกราฟเรียกว่า <u>เส้นรอบวง</u> ให้หาเส้นรอบวงของกราฟต่อไปนี้

    10.1 K_9 10.2 $K_{5,8}$ 10.3 กราฟทรง 20 หน้า
11. ให้เขียนกราฟต้นไม้อันดับ 7 จำนวน 11 แบบ
12. จงอธิบายให้เห็นว่ากราฟต้นไม้อันดับ n จะมีขนาด (เส้นเชื่อม) เท่ากับ n – 1
13. ให้หากราฟต้นไม้แบบบทอดข้ามทั้งหมดของกราฟเชื่อมโยงต่อไปนี้

12.1



12.2



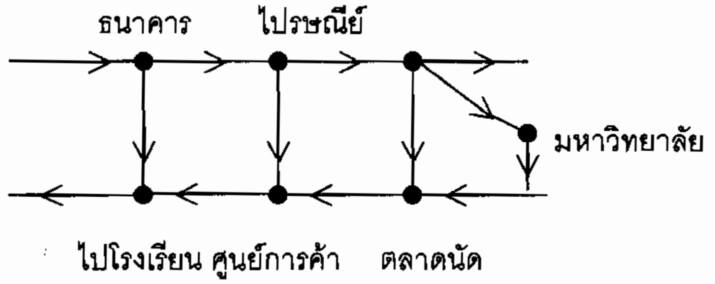
บทที่ 3

กราฟระบุทิศทาง (Directed Graphs)

3.1 <u>นำเรื่อง</u>

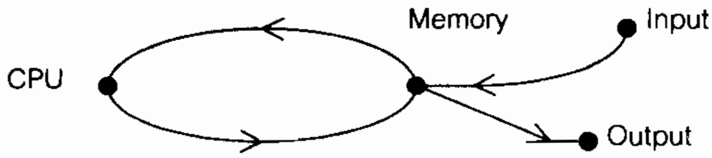
โดยทั่วไปเส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดของกราฟจะมีความสมมาตร นั่นคือเส้นเชื่อมมีลักษณะคล้ายการจราจรแบบสองทางแต่ในทางปฏิบัติมีบางกรณีเป็นแบบทางเดียว เช่น กรณีของการจราจรในถนนบางสายที่มีการเดินรถทางเดียว หรือกรณีของการส่งข้อมูลในคอมพิวเตอร์ขนาดเล็ก ซึ่งการส่งข้อมูลระหว่างหน่วย input กับหน่วย memory และการส่งข้อมูลระหว่างหน่วย memory กับหน่วย output เป็นแบบทางเดียว ในลักษณะเช่นนี้การใช้กราฟแบบเดิมเพื่ออธิบายสถานะการณ์ทำได้ไม่ครบถ้วน จึงจำเป็นต้องใช้กราฟที่สามารถบอกทิศทางได้ เรียกว่า **<u>กราฟระบุทิศทาง</u>**

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กราฟระบุทิศทางแสดงการเดินรถทางเดียว



จะเห็นได้ว่าเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด เป็นเส้นเชื่อมซึ่งระบุทิศทาง

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กราฟระบุทิศทางแสดงการส่งข้อมูลในคอมพิวเตอร์ขนาดเล็ก

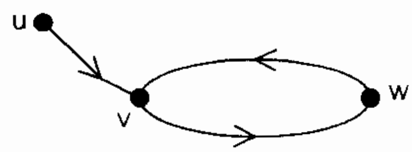


<u>บทนิยาม 3.1</u>

กราฟระบุทิศทางประกอบด้วย เซตของจุด V(D) กับ เซตของคู่อันดับ E(D) เป็นจำนวนนับได้ และเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด เรียกว่าเส้นระบุทิศทาง

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>

กราฟระบุทิศทาง D (ดังรูป)

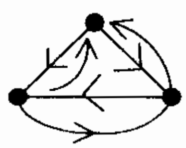


ประกอบด้วยเซตของจุดยอด V(D) $= \{u, v, w\}$

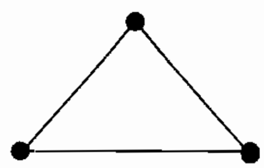
และเซตของคู่อันดับ E(D) $= \{(u,v), (v,w), (w,v)\}$

<u>ข้อสังเกต</u>

กราฟระบุทิศทางที่มีความสมมาตรคือกราฟ แต่มีความแตกต่างกันดังรูป



กราฟระบุทิศทาง
แบบสมมาตร



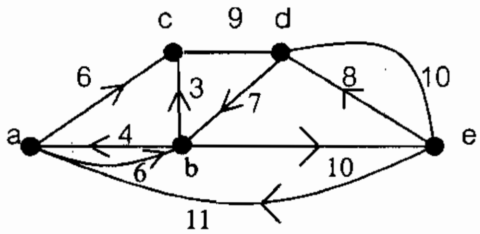
กราฟ

บทนิยาม 3.1.2

กราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีการกำหนดค่าจำนวนจริงบนเส้นเชื่อม e = (u,v) ทุกเส้น เรียกว่ากราฟน้ำหนัก (weighted graphs)

ตัวอย่างที่ 4

กราฟน้ำหนัก D = (V,E) แสดงเส้นทางและระยะเวลาที่ใช้ในการเดินทางระหว่างเมืองต่าง ๆ



ข้อสังเกต

1. เส้นระบุทิศทาง e = (u,v) อาจจะใช้แทน
   ก) ระยะทางจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v หรือ
   ข) ระยะเวลาจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v หรือ
   ค) ค่าใช้จ่ายในการเดินทางจากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v เป็นต้น
2. น้ำหนักของเส้น (u,v) กับ (v,u) อาจจะไม่เท่ากัน เช่น ในตัวอย่างที่ 4 นี้ น้ำหนักของเส้นจาก a ไป b ไม่เท่ากับน้ำหนักของเส้นจาก b ไป a
3. สัญลักษณ์ของน้ำหนักของเส้นใช้ w (u,v) เช่น w(a,b) = 6
4. ถ้าไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง u กับ v ใช้สัญลักษณ์ w (u,v) = ∞ เช่น w(e,a) = 11 แต่ w(a,e) = ∞

3.2 อันดับและขนาด

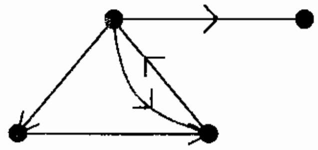
บทนิยาม 3.3.1

อันดับของกราฟระบุทิศทาง D คือจำนวนจุดยอดในกราฟ D

ตัวอย่างที่ 5

จากกราฟระบุทิศทาง D_1 ที่กำหนดให้

D_1 :



จะเห็นได้ชัดเจนว่า กราฟ D_1 มีอันดับที่ 4

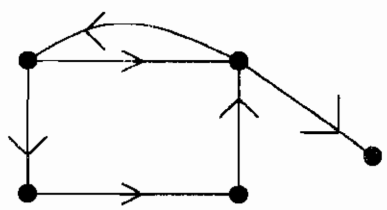
บทนิยาม 3.2.2

ขนาดของกราฟระบุทิศทาง D คือจำนวนเส้นเชื่อม ใน D

ตัวอย่างที่ 6

กราฟระบุทิศทาง D_2 ข้างล่างนี้

D_2



มีขนาดเท่ากับ 6

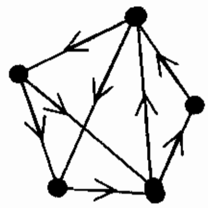
บทนิยาม 3.2.3

กราฟระบุทิศทางอันดับ p และขนาด q จะมีความสัมพันธ์ระหว่างอันดับกับขนาดในรูปอสมการ

$0 \leq q \leq p^2 - p$

ตัวอย่างที่ 7

กราฟระบุทิศทางข้างล่างนี้มีอันดับ 5 ขนาด 8



ดังนั้นตามบทนิยาม 4.1.5

$O < 8 < 20$

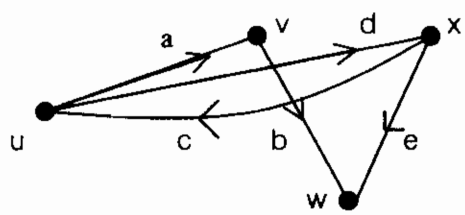
3.3 การประชิด

บทนิยาม 3.3.1

ถ้า a = (u,v) แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด u กับ v ในกราฟระบุทิศทาง D จะเรียกว่า a โยงจุดยอด u กับ v หรือ u ประชิดถึง v (v ไม่ประชิดถึง u) ถ้า b=(v,w) จะเรียกว่าเส้นเชื่อม a ประชิดกับ b หรือ b ถูกประชิดจากเส้นเชื่อม a

ตัวอย่างที่ 8

จากกราฟระบุทิศทางที่กำหนดให้



จะเห็นได้ว่า

a = (u,v) u ประชิดกับ v

b = (v,w) v ประชิดกับ w

c = (x,u x ประชิดกับ u

d = (u,x) u ประชิดกับ x

x กับ u ประชิดกัน

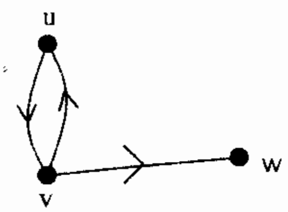
e = (x,w) x ประชิดกับ w

3.4 <u>ระดับขั้น</u>

<u>บทนิยาม 3.4.1</u>
ระดับขั้นออกจากจุดยอด v (out degree) **หรือ** odv **ในกราฟระบุทิศทาง** D **คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่**ออกจาก v **และระดับขั้นเข้าของจุดยอด** v (in degree) **หรือ** idv **คือจำนวนเส้นเชื่อมที่เข้ามาที่จุด** v

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>

จากกราฟระบุทิศทาง



จะเห็นได้ว่า

odv = 2

idv = idu = odu = 1

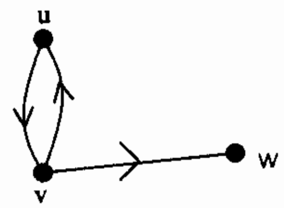
odw = 0

<u>บทนิยาม 3.4.2</u>
ในกราฟระบุทิศทาง D ระดับขั้นของจุดยอด v ใน D หรือ deg v เท่ากับผลบวกระหว่าง idv กับ odv นั่นคือ

deg v = odv + idv

ตัวอย่างที่ 10

จากกราฟ



จะเห็นได้ว่า

deg u = 2

deg v = 3

deg w = 1

idv = idu = idw = odu = 1

odv = 2

เพราะฉะนั้น deg u + deg v + deg w = idv + idu + idw + odu + odv

$\therefore \quad 2 + 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$

ทฤษฎีบท 3.1

ในกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีอันดับ p และขนาด q จะมีความสัมพันธ์

$$\sum_{i=1}^{p} \text{advi} = \sum_{i=1}^{p} \text{idv} = q$$

พิสูจน์

เพราะว่าจำนวนเส้นระบุทิศทางที่ออกจากจุดยอดใน D แต่ละเส้นจะถูกนับ 1 ครั้ง และจำนวนเส้นระบุทิศทางที่เข้าหาจุดยอดใน D แต่ละเส้นจะถูกนับ 1 ครั้ง ดังนั้นเมื่อรวมจำนวนเส้นระบุทิศทางจะได้

$$\sum_{i=1}^{p} adv_i = \sum_{i=1}^{p} idv_i$$

ซึ่งเท่ากับจำนวนเส้นระบุทิศทางของกราฟ D นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{p} adv_i = \sum_{i=1}^{p} idv_i = q$$

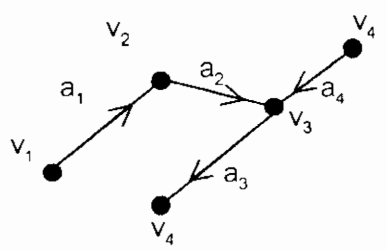
3.5 วิถี

แนวเดิน รอยเดิน และวิถีในกราฟระบุทิศทางมีแนวคิดเหมือนกับแนวเดิน รอยเดิน และวิถีในเรื่องกราฟ มีความแตกต่างที่มีทิศทางเป็นตัวกำกับด้วย

บทนิยาม 3.5.1
แนวเดินของกราฟระบุทิศทาง D คือ ลำดับของจุดยอดกับเส้นระบุทิศทาง v_1, a_1, v_2, a_2, ..., v_{n-1}, a_{n-1}, v_n
ซึ่งเส้น $a_i = (v_i, v_{i+1})$ $i = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่างที่ 11

กราฟระบุทิศทาง D :

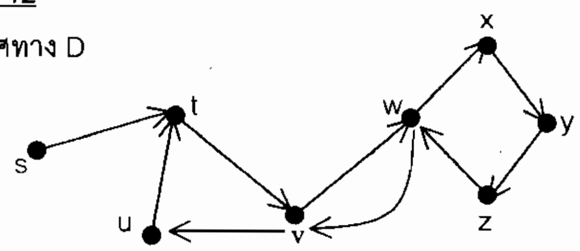


มีวิถี v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4

บทนิยาม 3.5.2
รอยเดินจากจุดยอด u ถึง v ในกราฟระบุทิศทาง D คือ แนวเดินที่ไม่ซ้ำเส้นเชื่อม และถ้ารอยเดินไม่ซ้ำจุดยอดใน D เรียกรอยเดินนั้นว่าวิถี

ตัวอย่างที่ 12

กราฟระบุทิศทาง D



มีแนวเดิน s, t, v, u, t

รอยเดิน t, v, w, x, y, z

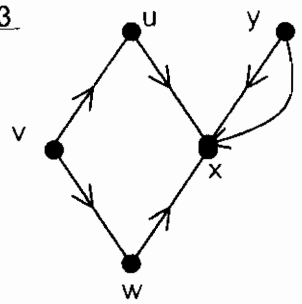
วิถี w, x, y, z

ส่วนรอยเดิน t, v, w, v, u ไม่เป็นวิถี เพราะซ้ำที่จุดยอด v

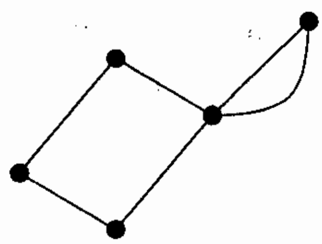
บทนิยาม 3.5.3

กำหนดให้ D เป็นกราฟระบุทิศทาง กราฟรองรับของ D คือกราฟที่ได้จากการแทนเส้นเชื่อมระบุทิศทาง ด้วยเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทาง

ตัวอย่างที่ 13



กราฟระบุทิศทาง D

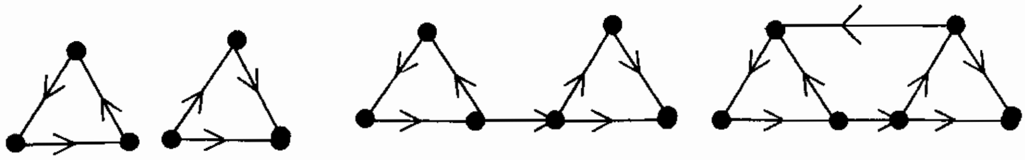


กราฟรองรับของ D

บทนิยาม 3.5.4

กราฟระบุทิศทาง D <u>มีความเชื่อมโยง</u> ถ้ากราฟรองรับของ D เป็นกราฟเชื่อมโยง และ D <u>มีความเชื่อมโยงแบบเข้ม</u> ถ้ามีวิถีจาก u ถึง v และมีวิถีจาก v ถึง u ใน D สำหรับจุดยอด u และจุดยอด v ใด ๆ ใน D

<u>ตัวอย่างที่ 14</u>



D1 ไม่เชื่อมโยง

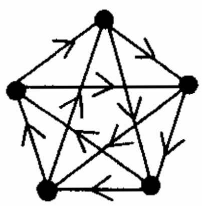
D2 เชื่อมโยง

D3 เชื่อมโยงแบบเข้ม

> **<u>บทนิยาม 3.5.5</u>**
> กราฟ G เรียกว่าวางทิศทางได้ถ้า G เป็นกราฟรองรับของกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม นั่นคือ สามารถกำหนดทิศทางให้กับเส้นเชื่อมของ G แล้วได้กราฟระบุทิศทางซึ่งมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม

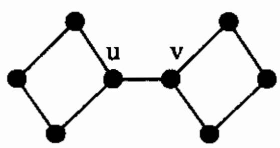
<u>ตัวอย่างที่ 15</u>

จะเห็นได้ว่าตามบทนิยาม กราฟสมบูรณ์ K_5 สามารถวางทิศทางและได้กราฟระบุทิศทางซึ่งมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม



> **<u>บทนิยาม 3.5.6</u>**
> เส้นเชื่อมในกราฟเชื่อมโยง เรียกว่า **<u>สะพาน</u>** ถ้าเอาเส้นเชื่อมออกแล้วกราฟขาดความเชื่อมโยง

<u>ตัวอย่างที่ 16</u>



กราฟนี้จะขาดความเชื่อมโยงถ้าเอาเส้นเชื่อม uv ออก

ข้อสังเกต ไม่ว่าจะกำหนดทิศทางกราฟนี้อย่างไร จะไม่ได้กราฟระบุทิศทางแบบเข้ม เพราะการกำหนดทิศทางให้กับ uv จะทำได้เพียงแบบใดแบบหนึ่ง นั่นคือ เป็นกราฟแบบวางทิศทางไม่ได้ ซึ่งมีทฤษฎีกำหนดไว้ดังนี้ คือ

ทฤษฎีบท 3.2
กราฟเชื่อมโยง G เป็นแบบซึ่งวางทิศทางได้ ก็ต่อเมื่อ และต่อเมื่อ กราฟ G ไม่มีสะพาน

พิสูจน์ (โดยใช้ความขัดแย้ง)

$\Rightarrow$ ถ้ากำหนดทิศทางให้ G ได้ G ต้องไม่มีสะพาน

ให้ G เป็นกราฟซึ่งวางทิศทางได้ และให้ G มีสะพาน e = uv เพราะว่ากำหนดทิศทางใน G ได้ จึงให้แต่ละเส้นเชื่อมใน G มีทิศทางและจะได้กราฟระบุทิศทางที่เชื่อมโยงแบบเข้ม นั่นคือ G มีวิถีจาก u ถึง v และวิถีจาก v ถึง u

เนื่องจาก G มีสะพาน uv แสดงว่าใน D ต้องมีเส้น uv หรือ vu เพียงเส้นเดียว ดังนั้นถ้าให้ D มีเส้น uv แสดงว่า D มีวิถีจาก u ถึง v แต่ D ไม่มีวิถีจาก v ถึง u เพราะทุกวิถีจาก v ถึง u ต้องมีเส้น vu แต่มีไม่ได้เพราะ uv เป็นสะพาน ดังนั้นจะวางทิศทางใน G ไม่ได้แสดงว่า G ต้องไม่มีสะพาน

$\Leftarrow$ ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่มีสะพาน G จะต้องกำหนดทิศทางได้เพราะว่า G ไม่มีสะพาน ดังนั้นทุกเส้นเชื่อมใน G ต้องอยู่ในวงเวียน (ในสะพานไม่มีวงเวียน)

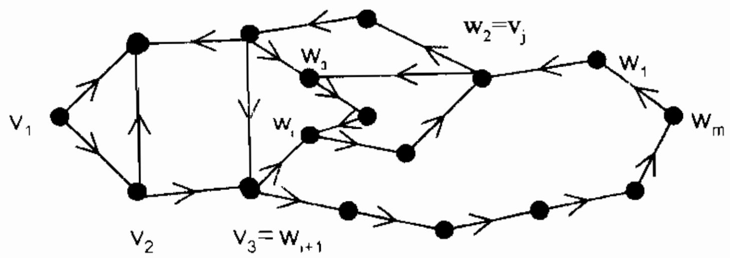
ให้ C เป็นวงเวียนของ G โดยที่วงเวียน C คือ $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n, v_1$ ให้เส้นเชื่อม v_nv_1 มีทิศทางจาก v_n ไป v_1 และเส้นเชื่อม $v_i v_{i+1}$ มีทิศทางจาก v_i ไป v_{i+1}, $i = 1,2,\ldots,n-1$

จะเห็นได้ว่าจุดในวงเวียน C ถ้าเป็นจุดประชิดกันแม้จะไม่เรียงลำดับก็สามารถกำหนดทิศทางระหว่างจุดเหล่านั้นได้ ดังนั้น ถ้าทุก ๆ จุดของ G อยู่ในวงเวียน C จะเห็นได้ทันทีว่าสามารถกำหนดทิศทางใน G ได้

ในกรณีที่บางจุดของ G ไม่อยู่ในวงเวียน C

เพราะว่า G มีความเชื่อมโยง แสดงว่าต้องมีจุดยอด w_1 ซึ่งไม่อยู่ใน C และ w_1v_j เป็นเส้นเชื่อมใน G, $1 \leq j \leq n$ เนื่องจาก w_1v_j ไม่เป็นสะพานใน G ดังนั้นต้องมีวงเวียน $C_1 : w_1, v_j = w_2, w_3, \ldots\ldots, w_m, w_1$ ใน G

ให้เส้นเชื่อม w_m, w_1 มีทิศทางจาก w_m ไป w_1 เส้นเชื่อม w_1 w_2 มีทิศทางจาก w_1 ไป w_2 และเส้นเชื่อม w_i, w_{i+1}, $i = 2, 3, \ldots.. m - 1$ ที่ยังไม่มีทิศทาง ให้กำหนดทิศทางจาก w_i, w_{i+1} ดังนั้น เส้นเชื่อมซึ่งยังไม่มีทิศทางที่โยงจุดยอดต่าง ๆ ในวงเวียน C_1 จะได้รับการกำหนดทิศทาง

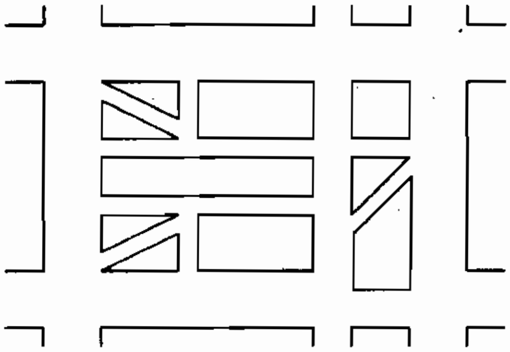


กราฟแสดงวิธีหนึ่งของการกำหนดทิศทาง

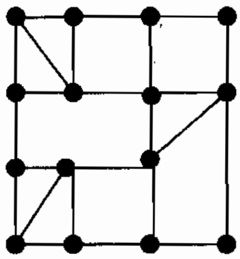
□ กราฟระบุทิศทาง D ซึ่งสร้างตามวิธีการนี้จะมีความเชื่อมโยงแบบเข้ม ถ้ากราฟ D รวมทุกจุดใน G ก็เป็นอันจบขั้นตอนตามวิธีการ แต่ถ้า D ยังไม่รวมทุกจุดใน G จะดำเนินการต่อไปจนทุกจุดใน G อยู่ในกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งเชื่อมโยงแบบเข้ม

ตัวอย่างที่ 17

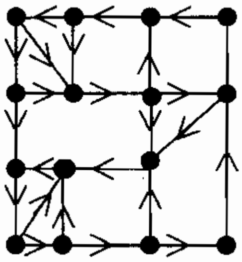
แสดงวิธีการจำลองแผนผังออกมาในรูปของกราฟ G และเพราะว่ากราฟ G ไม่มีสะพาน จึงทำให้ได้กราฟระบุทิศทาง D แบบเข้ม



แผนผังบริเวณการจราจร



กราฟเชื่อมโยง G



กราฟระบุทิศทาง D แบบเข้ม

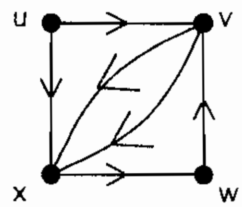
โดยทั่วไปจะสังเกตเห็นได้ว่าถ้าการจราจรเป็นแบบสวนทางและไม่คับคั่งเมื่อจำเป็นต้องมีการซ่อมแซมหรือปรับปรุงถนน การจราจรจะมีลักษณะแบบรถวิ่งทางเดียว ดังนั้น ถ้าผู้รับผิดชอบเกี่ยวกับการจราจรประสงค์จะให้ผู้ขับขี่ยวดยานวิ่งจากทางแยกหนึ่งไปอีกทางแยกหนึ่งได้ในขณะที่มีการซ่อมแซมหรือปรับปรุง อาจจะใช้วิธีการกำหนดทิศทางการจราจรตามกราฟระบุทิศทาง โดยในขั้นแรกต้องจำลองแผนผังบริเวณการจราจรเป็นกราฟ G โดยให้จุดยอดแทนทางแยกและเส้นเชื่อมแทนถนนระหว่างทางแยก จากนั้นการที่ยวดยานจะเดินทางจากทางแยกหนึ่งไปทางแยกอื่นได้ หมายถึงว่า กราฟ G ที่ได้ต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง และถ้ากราฟ G ไม่มีสะพาน หมายถึงว่า การซ่อมแซมหรือปรับปรุงถนนจะไม่เป็นอุปสรรคต่อการเดินทางจากทางแยกหนึ่งไปยังอีกทางแยกหนึ่ง อย่างไรก็ดีถ้าการจราจรคับคั่ง การที่จะเดินทางจากทางแยกหนึ่งไปอีกทางแยกหนึ่งอาจจะต้องเปลี่ยนระบบการ

จราจรจากรถวิ่งสวนทางก็ขอได้ให้เป็นรถวิ่งทางเดียว โดยใช้กราฟระบุทิศทาง D ที่ได้จากกราฟเชื่อมโยง G

> **<u>บทนิยาม 3.5.7</u>**
> ถ้า D เป็นกราฟระบุทิศทางอันดับ n เมทริกซ์ประชิด M(D) คือ เมทริกซ์ n x n ซึ่งสมาชิก a_{ij} คือ จำนวนเส้นเชื่อมจากจุดยอด u ไปจุดยอด j

<u>ตัวอย่างที่ 18</u>

ถ้ากำหนดกราฟระบุทิศทาง D อันดับ 4 ขนาด 6 ดังนี้



เมทริกซ์ประชิด M(D) ขนาด 4 x 4 คือ

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{cccc} u & v & w & x \end{array}}^{\text{หลัก}} \\ \text{แถว}\left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ x \end{array}\right. & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

จำนวนในเมทริกซ์คือจำนวนของเส้นเชื่อมโยงจุดยอดในกราฟ D

เช่น จุดยอด u กับ v มีเส้นเชื่อมโยง 1 เส้น ดังนั้น "1" ปรากฏในแถว 1 หลัก 2

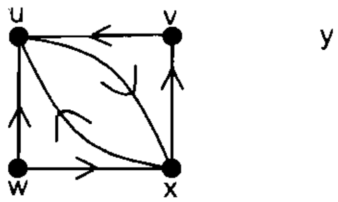
จุดยอด v กับ x มีเส้นเชื่อมโยง 2 เส้น ดังนั้น 2 ปรากฏในแถว 2 หลัก 4 เป็นต้น

Ψ Ψ ΨΨ Ψ Ψ ΨΨ

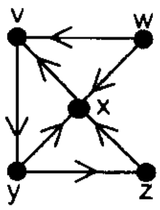
แบบฝึกหัด

1. ให้หาจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟระบุทิศทาง ต่อไปนี้

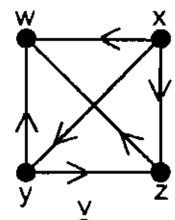
1.1



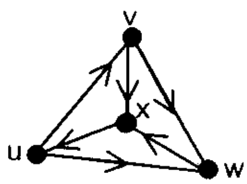
1.2



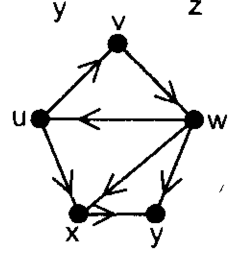
1.3



1.4



1.5



2. ให้สร้างกราฟระบุทิศทางจากเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมต่อไปนี้

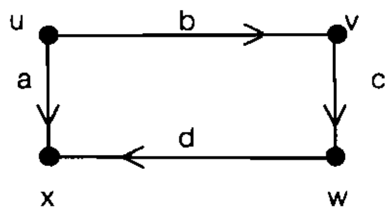
2.1 $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(D) = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_1, v_4 v_2, v_5 v_3, v_5 v_4\}$

2.2 $V(D) = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E(D) = \{ab, ac, ad, bc, bd, be, bf, ce, cf, de\}$

3. จากกราฟระบุทิศทางข้างล่างนี้ ให้อธิบายว่าข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิด



3.1 u กับ x ประชิดกัน

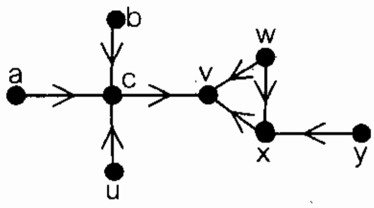
3.2 v กับ x ประชิดกัน

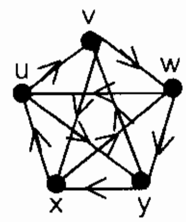
3.3 b เป็นเส้นเชื่อมโยงจาก x

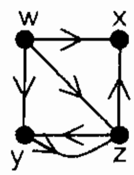
3.4 a เป็นเส้นเชื่อมโยงเข้าหา u

3.5 d เป็นเส้นเชื่อมโยงจาก x

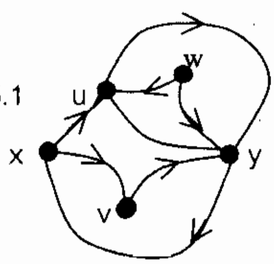
4. ให้หาระดับขั้นเข้า และระดับขั้นออก ของกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้

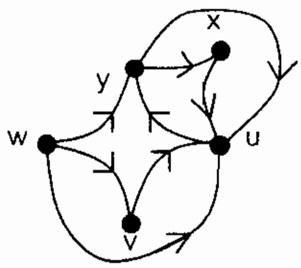
4.1 

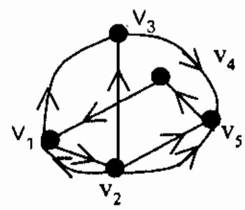
4.2 

4.3 

5. ให้หาเมทริกซ์ประชิดของกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้

5.1 

5.2 

5.3 

6. ให้สร้างกราฟระบุทิศทางจากเมทริกซ์ประชิดต่อไปนี้

6.1
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

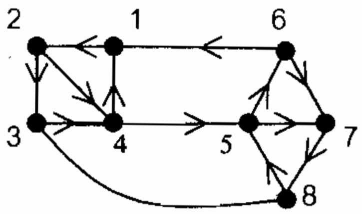
6.2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. จากกราฟระบุทิศทางที่เป็นผลลัพธ์ในข้อ 6 จงแสดงให้เห็นว่า

7.1 ผลบวกของจำนวนในแถวใด ๆ ของเมทริกซ์ประชิดเท่ากับจำนวนระดับขั้นออกของจุดยอดที่สมนัยกับแถวนั้น

7.2 ผลบวกของจำนวนในหลักใด ๆ ของเมทริกซ์ประชิดเท่ากับจำนวนระดับขั้นเข้าของจุดยอดที่สมนัยกับหลักนั้น

8. จากกราฟระบุทิศทางที่กำหนดให้



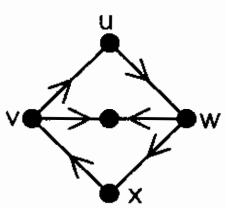
8.1 ให้หาวิถีความยาว 5 ความยาว 6 และความยาว 7 จากจุดยอด 1 ถึง 8

8.2 ให้หาวิถีความยาว 3 และความยาว 5 จากจุดยอด 8 ถึง 1

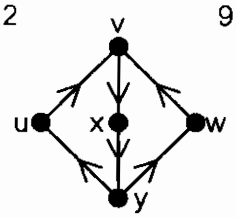
8.3 ให้หาวิถีปิดความยาว 8 ที่รวมจุดยอด 1 และ 8

9. จงอธิบายให้เห็นว่ากราฟระบุทิศทางต่อไปนี้ กราฟใดบ้างที่ขาดความเชื่อมโยงหรือมีความเชื่อมโยงแต่ไม่เป็นแบบเข้ม หรือมีความเชื่อมโยงและเป็นแบบเข้ม

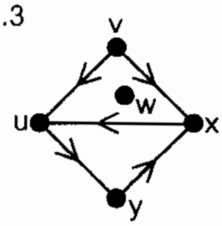
9.1



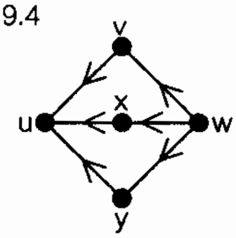
9.2



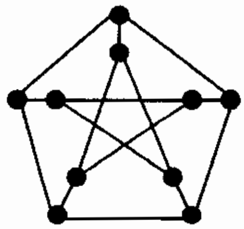
9.3



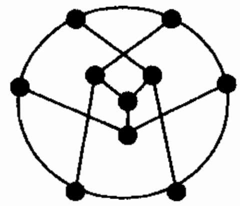
9.4



10. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟแบบปีเตอร์เสน



หรือ

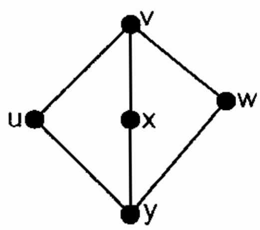


สามารถวางทิศทางได้ และกราฟระบุทิศทางที่ได้จากการวางทิศทางเป็นกราฟเชื่อมโยงแบบเข้ม

11. ถ้า M เป็นเมทริกซ์ของกราฟระบุทิศทาง D จงพิสูจน์ให้เห็นว่า สมาชิก ij ของเมทริกซ์ M^n จะบอกจำนวนวิถีของความยาว n จากจุดยอด u_i ถึง u_j

(ข้อแนะนำ ให้ใช้คณิตศาสตร์อุปนัยที่ความยาว n)

12. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

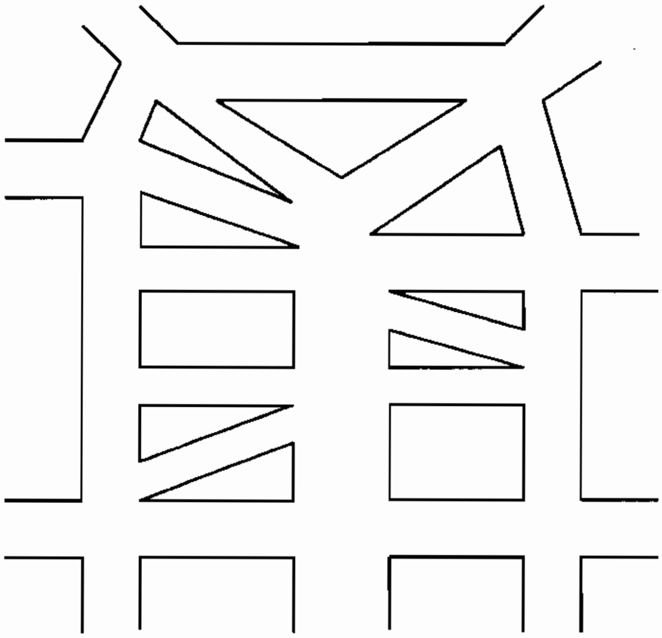


12.1 เป็นกราฟที่วางทิศทางได้

12.2 ให้วางทิศทางของกราฟ G เพื่อให้ได้กราฟระบุทิศทาง D ซึ่งเชื่อมโยงแบบเข้ม

13. ให้อธิบายว่ากราฟซึ่งมีจุดตัดจะสามารถกำหนดทิศทางได้หรือไม่

14. จากแผนที่ตามรูป จงจำลองด้วยกราฟ G และกราฟระบุทิศทาง D



15. ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีอันดับอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ 3 และ G ไม่มีสะพาน จงแสดงให้เห็นว่า

15.1 สามารถวางทิศทางให้กราฟ G ได้

15.2 กราฟ D ที่ได้มีความเชื่อมโยงแบบไม่เข้ม

บทที่ 4
ประยุกต์ของกราฟระบุทิศทาง

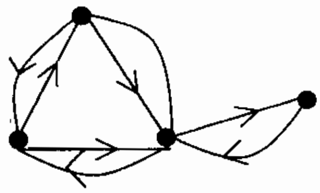
4.1 <u>นำเรื่อง</u>

กราฟระบุทิศทางสามารถประยุกต์ใช้ได้ในหลายสาขาวิชาเช่นเดียวกับกราฟ สำหรับในบทนี้จะนำตัวอย่างการประยุกต์ที่สำคัญต่าง ๆ ของกราฟระบุทิศทางมาอธิบายให้เห็นแนวความคิดและวิธีการนำไปใช้ เรื่องแรก ที่จะกล่าวถึงคือ กราฟระบุทิศทางที่ใช้ในกราฟการแข่งขัน (tournaments) ซึ่งได้ชื่อมาจากการแข่งขันกีฬาแบบทุกทีมที่เข้าแข่งขันต้องพบกันหมดทีมละ 1 ครั้ง และไม่ให้มีการเสมอ

ในการทำความเข้าใจเรื่องการประยุกต์ในสถานะการณ์ต่าง ๆ ของกราฟระบุทิศทาง มีบทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 4.1.1</u>
กราฟระบุทิศทาง D เรียกว่า <u>มีความสมมาตร</u> (Symmetry) ถ้าหากเมื่อใดก็ตามที่มีเส้นเชื่อม v_1v_2 แล้วมีเส้นเชื่อม v_2v_1 สำหรับจุดยอด v_1 และ v_2 ใด ๆ ใน D

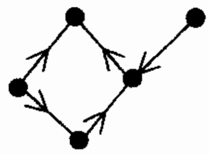
<u>ตัวอย่างที่ 1</u>
กราฟ D ต่อไปนี้ เป็นกราฟระบุทิศทางที่มีความสมมาตร



<u>บทนิยาม 4.1.2</u>
กราฟระบุทิศทาง D เรียกว่า <u>ไม่มีความสมมาตร</u> หรือ อสมมาตร (asymmetry) ถ้าหากเมื่อใดก็ตามที่มีเส้นเชื่อม v_1v_2 แล้ว ไม่มีเส้นเชื่อม v_2v_1 สำหรับจุดยอด v_1 และ v_2 ใด ๆ ใน D

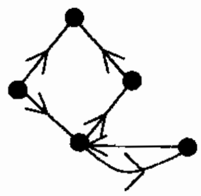
ตัวอย่างที่ 2

กราฟ D ต่อไปนี้ เป็นกราฟระบุทิศทางแบบอสมมาตร



ตัวอย่างที่ 3

กราฟ D ต่อไปนี้เป็นกราฟระบุทิศทางแบบผสม คือไม่มีคุณสมบัติของสมมาตร หรือ อสมมาตร



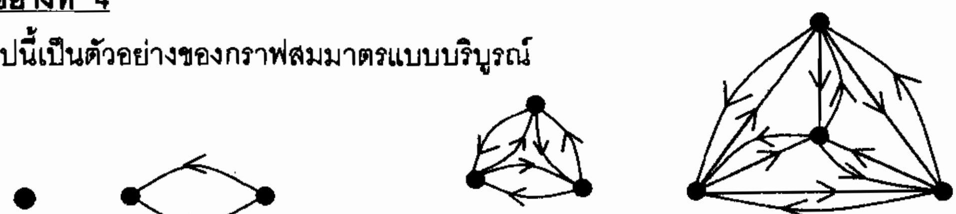
บทนิยาม 4.1.3

กราฟระบุทิศทาง D เรียกว่า เป็น<u>กราฟแบบบริบูรณ์</u> (complete) ถ้าเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด v_1 และ v_2 ใด ๆ ใน D มีทิศทางกำหนด 1 ทิศทาง และเรียกว่า D เป็น<u>กราฟสมมาตรแบบบริบูรณ์</u> ถ้ามีเส้นระบุทิศทางทั้งจากจุดยอด v_1 ไป v_2 และจาก v_2 ไป v_1 ($v_1 \neq v_2$)

กราฟระบุทิศทางซึ่งมีความสมมาตรแบบบริบูรณ์มีสัญลักษณ์ คือ K_p ซึ่ง p แทนอันดับในกราฟ และกราฟ K_p มีขนาด $p(p-1)$

ตัวอย่างที่ 4

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของกราฟสมมาตรแบบบริบูรณ์



K_1 K_2 K_3 K_4

บทนิยาม 4.1.4

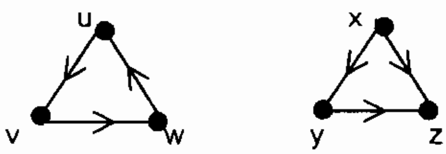
กราฟระบุทิศทาง D เรียกว่า <u>กราฟการแข่งขัน</u> (tournament) ถ้า D เป็นกราฟระบุทิศทางอสมมาตรแบบบริบูรณ์ นั่นคือ สำหรับจุดยอด v_1 และ v_2 ใด ๆ ใน D ซึ่ง $v_1 \neq v_2$ จะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางระหว่าง v_1 และ v_2 เพียงเส้นเดียวส่วนจำนวนคะแนนของจุดยอดในกราฟแทนด้วย S(V) คือดีกรีออกจากจุดยอดนั้น และลำดับคะแนนของกราฟคือ ลำดับของดีกรีออก

ตัวอย่างที่ 5

กราฟการแข่งขันอันดับ 1 มี 1 รูป

กราฟการแข่งขันอันดับ 2 มี 1 รูป

กราฟการแข่งขันอันดับ 3 มี 2 รูป แตกต่างกัน



D_1 D_2

จะเห็นได้ว่ากราฟ D_1 มี id = od = 1 สำหรับจุดยอดใด ๆ ใน D_1

แต่ D_2 มี odx = idz = 2

odx = idy = 1

odz = idx = 0

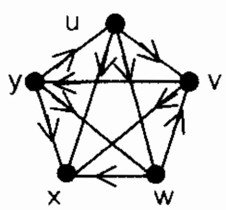
ตัวอย่างที่ 6

ถ้ากราฟการแข่งขัน D_1 มีจุดยอด n จุด ซึ่งแต่ละจุดยอดมีจำนวนคะแนนแตกต่างกัน จำนวนลำดับของคะแนนของกราฟ D_1 จะเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

เนื่องจากในกราฟการแข่งขันที่มีผู้เล่นจำนวน n คน แต่ละคนสามารถได้รับชัยชนะได้ไม่เกิน n – 1 ครั้ง ดังนั้นจุดยอดแต่ละจุดจะมีจำนวนคะแนนอย่างมากที่สุด n – 1 คะแนน และเพราะว่าจุดยอดแต่ละจุดมีคะแนนเป็นบวก ดังนั้น จำนวนคะแนนจะอยู่ในช่วง $0 \leq S \leq n - 1$ นั่นคือ ลำดับของจำนวนแต้มที่ไม่ซ้ำกันใน D_1 จะเท่ากับ {0, 1, 2, ……., n – 1}

กราฟการแข่งขันพบได้ในกรณีต่าง ๆ กัน กรณีที่เห็นได้ชัดเจน คือ กรณีการแข่งขันกีฬาแบบทุกทีมที่เข้าแข่งขันต้องพบกัน 1 ครั้ง ในกราฟการแข่งขัน แต่ละทีมแทนด้วยจุดยอด 1 จุด และทีมที่แข่งขันกันจะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เช่น ถ้าเส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก u ไป v แสดงว่าทีม u มีชัยชนะเหนือทีม v จำนวนคะแนนของแต่ละจุดคือจำนวนของชัยชนะและลำดับของจำนวนคะแนน คือลำดับของชัยชนะของแต่ละทีม เช่นการแข่งขันของ 5 ทีม แบบพบกันหมด (ดังกราฟ)



y ชนะ 3

u ชนะ 3

v ชนะ 2

จะมีลำดับคะแนนดังนี้ คือ 3,3,2,2,0

กราฟการแข่งขันซึ่งใช้ในด้านชีววิทยา จะเกี่ยวข้องกับสัตว์แต่ละคู่ซึ่งสัตว์ตัวหนึ่งมีอำนาจหรืออิทธิพลเหนือสัตว์อีกตัวหนึ่งทำให้สามารถใช้กราฟในการกำหนดลำดับของความมีอำนาจจะเหนือกันและกันได้

โดยปกติถือเป็นเรื่องสำคัญที่ต้องจัดลำดับของจุดยอดในกราฟการแข่งขัน เช่น กราฟการแข่งขันแบบพบกัน 5 ทีมข้างต้น จำนวนของชัยชนะกำหนดว่า u, v, w, x และ y คือ 3,2,2,0 และ 3 ตามลำดับ เพราะว่า u และ y มีคะแนนสูงสุด ทีม u และ y ควรจะมีชัยชนะนำหน้าทีมอื่น และเพราะว่า y ชนะ u ทีม y จึงควรจัดอันดับมาก่อนทีม u ซึ่งทีม u อาจจะไม่ชอบเท่าใดเพราะว่าทีม u เอาชนะทีม v ซึ่งชนะทีม y ในกรณีเช่นนี้จึงอาจจะใช้วิถีของแฮมิลตันช่วยในการจัดอันดับได้ กล่าวคือ ทีม B

จะจัดว่ามีลำดับที่ก่อนทีม A ถ้าวิถีแฮมิลตันถึงจุด B ก่อนจุด A กรณีเช่นนี้ เมื่อดูจากกราฟตัวอย่าง ซึ่งมีวิถี yuwvx เป็นแบบแฮมิลตัน ซึ่งสอดคล้องกับการจัดอันดับทีมผู้เล่น ดังนั้น ทีม y จึงควรมีลำดับก่อนทีม u

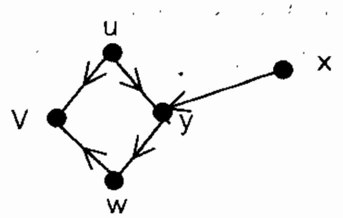
บทนิยาม 4.1.5

จุดยอด v ใด ๆ ในกราฟการแข่งขันเรียกว่าเป็น จุดส่ง ถ้ามี odv เป็นบวก และ idv เป็นศูนย์ แต่เรียกจุดยอด v ว่าเป็นจุดรับถ้า idv เป็นบวก และ odv เป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 7

กำหนดกราฟการแข่งขัน D_1 ดังต่อไปนี้

D_1 :



จะเห็นได้ว่า จุดยอด u และ x เป็นจุดส่ง

จุดยอด v เป็นจุดรับ

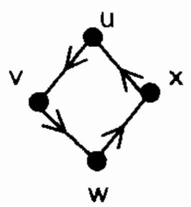
จุดยอด w และ y เป็นทั้งจุดรับและจุดส่ง

บทนิยาม 4.1.6

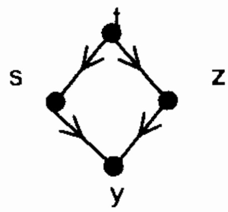
กราฟการแข่งขัน D เรียกว่า มีการถ่ายทอด (transitive) ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ uv และ vw เป็นเส้นเชื่อมใน D แล้ว uw เป็นเส้นเชื่อมใน D ด้วย

ตัวอย่างที่ 8

D_1



D_2



D_1 ไม่มีการถ่ายทอด D_2 มีการถ่ายทอด

ทฤษฎีบท 4.1

กราฟการแข่งขัน D เป็นแบบที่มีการถ่ายทอดก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ กราฟ D ไม่มีวงเวียน

พิสูจน์

$\Leftarrow$ ให้ D เป็นกราฟการแข่งขันซึ่งไม่มีวงเวียน และให้ uv และ vw เป็นเส้นเชื่อมระบุทิศทางใน D เพราะว่า D ไม่มีวงเวียนทำให้ไม่มีเส้นเชื่อม wv ใน D แต่มีเส้นเชื่อม vw ดังนั้น D มีการถ่ายทอด

$\Rightarrow$ ถ้า D มีการถ่ายทอดและมีวงเวียน C ซึ่ง C คือ $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ ($n \geq 3$ เพราะว่า D เป็นแบบอสมมาตร)

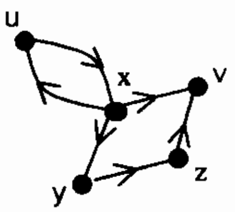
เพราะว่าเส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก v_1 ไป v_2 และจาก v_2 ไป v_3 ดังนั้นมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก v_1 ไป v_3 ใน D (D มีการถ่ายทอด) ในทำนองเดียวกัน $v_1 v_4$,$v_1 v_5$,..... และ $v_1 v_n$ เป็นเส้นเชื่อมระบุทิศทางใน D แต่ในวงเวียน C มีเส้นเชื่อมคือ $v_n v_1$ ได้ความขัดแย้ง ดังนั้น D ต้องไม่มีวงเวียน

บทนิยาม 4.1.7

ระยะทางจากจุดยอด u ถึง v หรือ d(u,v) สำหรับ u และ v ใด ๆ ในกราฟระบุทิศทาง D คือความยาวของวิถีจาก u ถึง v ซึ่งสั้นที่สุด

ตัวอย่างที่ 9

กำหนดกราฟ D ดังต่อไปนี้



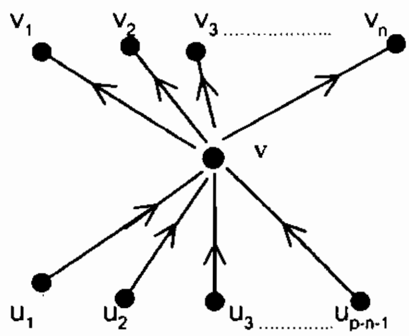
จะเห็นได้ว่า d(u,v) = 2 ได้จากวิถี u x v

ทฤษฎีบท 4.2

ถ้า D เป็นกราฟการแข่งขัน และ v เป็นจุดยอดใน D ซึ่ง odv มีค่าสูงสุดใน D ระยะทางจาก v ไปยังจุดยอดอื่น ๆ ใน D จะเท่ากับ 1 หรือ 2

พิสูจน์

ให้ odv = n และจุดประชิดจาก v เป็น $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ถ้ากราฟ D มีอันดับ p จุดยอดที่เหลือคือ u_1 $, u_2, \ldots, u_{p-n-1}$ เป็นจุดประชิดที่เข้าหาจุด v



เพราะว่าจุด v_i , $1 \leq i \leq n$ มีระยะห่างจากจุด v หรือ $d(v, v_i) = 1$ ถ้าเซตของจุดยอดใน D คือ $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ จะได้ $d(v, v_i) = 1$ ตามทฤษฎี ถ้า D มีจุดอื่น ๆ ที่แตกต่างจากจุด v และ v_i ให้จุด

เหล่านั้นเป็น u_j , $1 \le j \le p - n - 1$ (เพื่อแสดงให้เห็นว่าระยะทางจาก u_j ถึง v เท่ากับ 2) จะเห็นได้ชัดเจนว่าแต่ละจุด u_j ถ้าเป็น odu_j จากจุด v_i ระยะทาง $d(v, u_j) = 2$ ตามทฤษฎี แต่ถ้าสมมุติว่ามีจุด u_k ซึ่ง $1 \le k \le p - n - 1$ ซึ่งไม่เป็น odu_j จาก v_i แสดงว่าเป็น idu_k เข้าหา v_i และเข้าหาจุด v_j ด้วย ซึ่งในกรณีเช่นนี้

$$odu_k \ge n + 1$$

แต่เป็นไปไม่ได้เพราะมีเฉพาะจุดยอด v เท่านั้น ซึ่ง odv มีค่าสูงสุด และ odv = n ดังนั้นแต่ละจุด u_j เป็น odu_j จากจุด v

ข้อสังเกต

ตามทฤษฎีนี้มีความหมายว่าในการแข่งขันเป็นทีมที่มีทีมนักกีฬาเข้าแข่งขันหลายทีม มีเงื่อนไขว่า ทุกทีมต้องพบกันและไม่ให้มีการเสมอ และทีมใด ๆ เช่น w ถือว่าเป็นทีมแพ้ก็ต่อเมื่อทีมที่ชนะทีม w ไปแพ้ทีมที่แพ้ทีม w

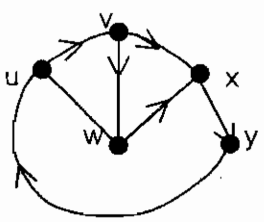
กราฟแข่งขันมีคุณสมบัติที่น่าสนใจอีกเรื่องหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับวิถีแบบแฮมิลตัน

บทนิยาม 4.1.8

ในกราฟระบุทิศทาง D วิถีแบบแฮมิลตันคือวิถีที่รวมจุดทั้งหมดใน D

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดกราฟระบุทิศทาง D ดังต่อไปนี้



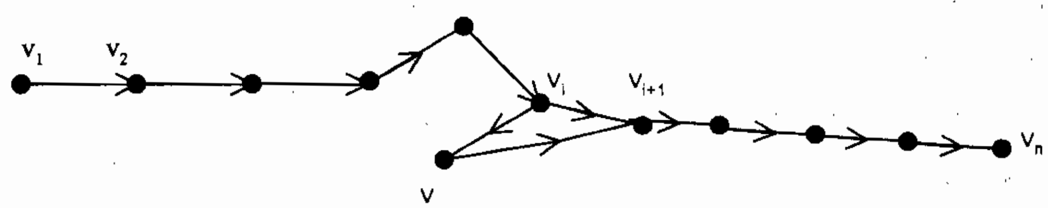
วิถี u v w x y เป็นวิถีแบบแฮมิลตัน

ทฤษฎีบท 4.3
กราฟการแข่งขันต้องมีวิถีแบบแฮมิลตัน

พิสูจน์ (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)

กราฟการแข่งขันซึ่งมีจุดยอด 1 ถึง 4 จุด มีวิถีแบบแฮมิลตัน กำหนดให้กราฟการแข่งขันอันดับ n ซึ่ง $n \geq 4$ มีวิถีแบบแฮมิลตัน ถ้ากราฟการแข่งขัน D มีอันดับ n + 1 และมี v เป็นจุดยอดจุดหนึ่งใน D ดังนั้น D - v จะมีอันดับ n และมีวิถีแบบแฮมิลตัน

ให้วิถีแบบแฮมิลตันนี้คือ P : $v_1,v_2, v_3, \ldots, v_n$ ถ้า vv_1 เป็นเส้นระบุทิศทางในกราฟ D กราฟ D จะมีวิถีแบบแฮมิลตันเป็น $v\ v_1,v_2, \ldots, v_{n-1}\ v_n$ ถ้า v_nv เป็นเส้นระบุทิศทางใน D กราฟ D จะมีวิถีแบบแฮมิลตัน $v_1,v_2, v_3, \ldots, v_n, v$ให้ $v_1\ v$ เป็นเส้นระบุทิศทางใน D ถ้าจุด v_i ซึ่ง $1 \leq i \leq n$ เป็นจุดประชิดเข้าหาจุด v กราฟ D ต้องมีวิถีแบบแฮมิลตัน เพราะว่า v_nv เป็นเส้นระบุทิศทางใน D ถ้าจุด v_i ซึ่ง $1 \leq i \leq n$ ไม่เป็นจุดประชิดเข้าหาจุด v แสดงว่าต้องมีจุดยอด v_i ซึ่ง $1 \leq i \leq n-1$ ซึ่งเส้นเชื่อม v_iv และ vv_{i+1} เป็นเส้นระบุทิศทางใน D (ดังรูป)



ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้คือ วิถี $v_1,v_2, \ldots, v_i, v, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n$ เป็นวิถีแบบแฮมิลตัน

ข้อสังเกต

ผลของทฤษฎีแสดงว่าในการแข่งขันแบบพบกันหมด n ทีม อาจจะจัดอันดับเป็น $D_1,D_2, \ldots, D_n$ โดยมีทีม D_1 ชนะทีม D_2 ทีม D_2 ชนะทีม D_3 ฯลฯ

4.2 **ประยุกต์ของกราฟระบุทิศทาง**

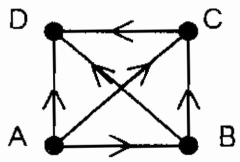
ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการใช้กราฟระบุทิศทางในด้านสังคมศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ตัวอย่างที่ 11

ให้ใช้กราฟการแข่งขันช่วยในการพิจารณาว่านางสาวลมเย็น แก่นเพชร จะเลือกซื้อรถแบบใดจาก 4 แบบ ที่มีให้เลือก คือ แบบ A แบบ B แบบ C แบบ D กำหนดให้ว่านางสาวลมเย็น ชอบรถทั้ง 4 แบบ เรียงตามลำดับ คือ ลำดับ 1 แบบ A ลำดับ 2 แบบ B ลำดับ 3 แบบ C ลำดับ 4 แบบ D

วิธีทำ

กำหนดให้จุดแทนแบบของรถ และเส้นเชื่อมระบุทิศทางแสดงความชอบมากกว่า จะสามารถสร้างกราฟการแข่งขันได้ดังนี้ คือ



จะเห็นได้ว่าระหว่างรถแบบ A กับ แบบ B นางสาวลมเย็น จะเลือกซื้อรถแบบ A มากกว่า B (เส้นเชื่อมระบุทิศทางจาก A ไป B) ในทำนองเดียวกัน ระหว่างรถ แบบ B กับแบบ C นางสาวลมเย็น จะเลือกรถ แบบ B มากกว่า และระหว่างรถแบบ C กับแบบ D จะเลือกรถแบบ C มากกว่าแบบ D

การใช้กราฟแข่งขันในการเลือกนี้จะเห็นได้ว่า ถ้ากราฟเป็นแบบไม่มีวงเวียนการตัดสินใจเลือกจะเป็นแบบที่แน่นอนไม่มีข้อที่ต้องลังเล แต่ถ้ากราฟเป็นแบบมีวงเวียน การเลือกอาจจะเกิดปัญหาด้านความลำเอียง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 12

มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีคณะกรรมการดำเนินงานซึ่งในจำนวนกรรมการทั้งหมด ต้องมีตัวแทนจากนักศึกษา 1 คน เป็นกรรมการ ซึ่งตัวแทนจากนักศึกษาจะต้องเลือก มาจากนักศึกษาในชั้นปีที่ 1 ปีที่ 2 ปีที่ 3 ปีที่ 4 หรือปริญญาโท ซึ่งในการคัดเลือกจะมีกรรมการองค์การนักศึกษา 3 คน เป็นผู้คัดเลือก

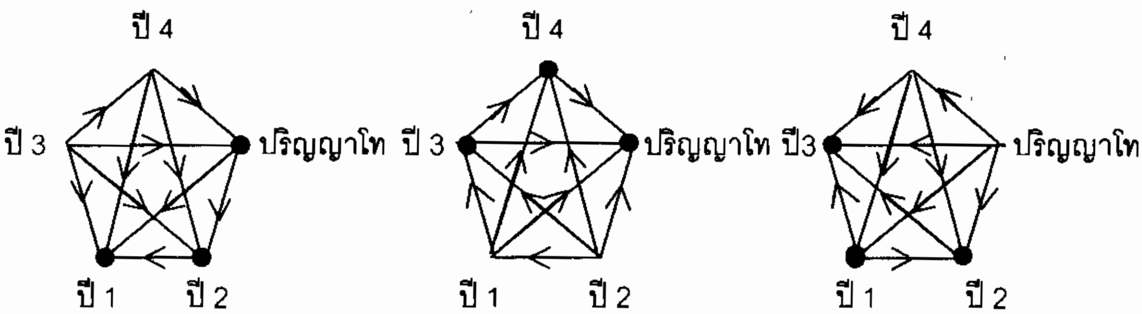
เพื่อหาว่านักศึกษาชั้นปีใดเหมาะสมที่สุดที่จะเข้าไปเป็นตัวแทน กรรมการองค์การทั้ง 3 คน คือ จำแลง ในฐานะประธาน คมขำ และ เพรียวลม เป็นกรรมการ ซึ่งจากการพบปะหารือจำแลง คมขำ และเพรียวลม พบว่าต่างมีอันดับความชอบต่าง ๆ กัน ดังนี้

อันดับที่	จำแลง ชอบ	คมขำ ชอบ	เพรียวลม ชอบ
1	ปี 3	ปี 1	ปริญญาโท
2	ปี 4	ปี 2	ปี 4
3	ปริญญาโท	ปี 3	ปี 2
4	ปี 1	ปี 4	ปี 1
5	ปี 2	ปริญญาโท	ปี 3

ให้พิจารณาว่าโดยใช้กราฟการแข่งขัน จำแลง ในฐานะประธานกรรมการจะใช้วิธีการสรรหาแบบใด เพื่อให้ได้ตัวแทนที่เป็นนักศึกษาปี 3 ซึ่งจำแลงชอบมากที่สุดเป็นอันดับ 1

วิธีทำ

กราฟการแข่งขันแสดงอันดับความชอบของกรรมการทั้งสามมีดังนี้



กราฟการแข่งขันมีวงเวียน ดังนั้น เพื่อให้ได้ตัวแทนนักศึกษาที่จำแลง ชอบมากที่สุด จำแลง ต้องนำเสนอวิธีการคัดเลือกในฐานะประธาน ด้วยการให้เหตุผลว่า เนื่องจากมติของกรรมการไม่เป็นเอกฉันท์ ในเรื่องจะให้นักศึกษาปีใดเป็นตัวแทน จึงขอเสนอให้เลือกโดยวิธีการคัดออกครั้งละ 1 คน จาก

2 คน นั่นคือ พิจารณาตัวแทนนักศึกษาคราวละ 2 คน แล้วคัดออก 1 คน จนกว่าจะได้ตัวแทนที่ต้องการ

ชั้นที่หนึ่ง กรรมการลงมติคัดเลือกระหว่างตัวแทนนักศึกษา ปี 1 กับ ปี 2 ผลลัพธ์คือได้นักศึกษา ปี 1 เป็นตัวแทน

ชั้นที่สอง คัดเลือกระหว่างตัวแทนนักศึกษาปี 3 กับ ปี 4 ผลลัพธ์คือได้ นักศึกษาปี 3 เป็นตัวแทน (ถึงชั้นนี้เหลือเฉพาะนักศึกษาปริญญาโท ผลลัพธ์ คือ ได้นักศึกษาปริญญาโท

ชั้นที่สาม คัดเลือกระหว่างนักศึกษาปี 1 กับนักศึกษาปริญญาโท ผลลัพธ์ คือ ได้นักศึกษาปริญญาโท

ชั้นที่สี่ คัดเลือกระหว่างนักศึกษาปี 3 กับนักศึกษาปริญญาโท ผลลัพธ์ คือ ได้นักศึกษาปี 3 เป็นตัวแทน ซึ่งเป็นตัวแทนนักศึกษาที่จำแลงชอบมากที่สุด

<u>ตัวอย่างที่ 13</u>

ในการเลือกผู้ว่าการเมืองใหม่แห่งหนึ่งซึ่งมีผู้สมัคร 3 คน คือ วิจิตร วาทะ และ โวหาร เนื่องจากเป็นเมืองที่ได้รับการยกฐานะขึ้นมาใหม่ เจ้าหน้าที่ผู้ดำเนินการเลือกตั้งรู้สึกไม่มั่นใจในการดำเนินงาน จึงขอคำปรึกษาจาก ดร. ชื่นชอบ จริงใจ ซึ่งสอนที่มหาวิทยาลัยใกล้ตัวเมือง ดร. ชื่นชอบ ขอเวลาพิจารณาสองสามวัน ประกอบกับการเลือกตั้งใกล้กำหนดเวลาเข้ามา ดร.ชื่นชอบ ให้นักศึกษาออกสำรวจความคิดเห็นผู้มีสิทธิออกเสียงได้รับผล ดังนี้คือ

1. ในจำนวนผู้มีสิทธิออกเสียงเลือกตั้ง 2,170 คน สองในสามยืนยันว่าวางแผนจะไปใช้สิทธิในวันแรงงาน
2. 35 % ของผู้มีสิทธิออกเสียง เลือกวิจิตร เป็นอันดับหนึ่ง และเกือบทั้งหมดเลือกโวหาร เป็นอันดับสอง
3. 30 % เลือกวาทะเป็นอันดับแรก และเกือบทั้งหมดเลือกโวหาร เป็นอันดับสอง
4. 25 % เลือกโวหาร เป็นอันดับแรก และเกือบทั้งหมดเลือกวาทะ เป็นอันดับสอง
5. 10 % ยังไม่ตัดสินใจ

จากการสำรวจ ดร. ชื่นชอบ โทรศัพท์ถึงผู้สมัครทั้งสามและบอกกับแต่ละคนว่ามีโอกาสที่จะได้รับเลือกเป็นผู้ว่าการฯ แต่จะต้องเสียค่าใช้จ่ายจำนวนหนึ่งในขณะที่รอคำตอบจากผู้สมัคร ดร. ชื่นชอบ ทำบันทึกช่วยจำไว้ 3 เล่ม ซึ่งจะมีเพียงหนึ่งเล่มที่มอบให้กับเจ้าหน้าที่ผู้ดำเนินการเลือกตั้ง

<u>บันทึกเล่มที่ 1</u>

เสนอให้เจ้าหน้าที่จัดเลือกตั้งในวันแรงงาน และประกาศรายชื่อผู้ได้รับคะแนนเสียงสูงสุดให้เป็นผู้ว่าการฯ วิธีนี้ดีที่สุด เพราะประหยัดค่าใช้จ่าย

<u>บันทึกเล่มที่ 2</u>

เสนอให้เจ้าหน้าที่จัดเลือกตั้ง 2 ครั้ง ครั้งแรกเป็นการเลือกเพื่อคัดผู้ได้คะแนนเสียงต่ำสุดออก ครั้งที่สองเป็นการแข่งขันระหว่างผู้ได้คะแนนสูงจากการเลือกครั้งแรก ผู้ที่ได้คะแนนเสียงมากที่สุดเป็นผู้ชนะ วิธีการแบบนี้ทำให้มั่นใจได้ว่าผู้ว่าการฯคนใหม่ ได้รับคะแนนเสียงส่วนมากจากผู้มีสิทธิลงคะแนน

<u>บันทึกเล่มที่ 3</u>

เสนอให้มีการเลือกตั้ง 2 ครั้ง โดยครั้งแรกให้ผู้มีสิทธิออกเสียงลงความเห็นว่าไม่ต้องการให้ผู้สมัครคนใดเป็นผู้ว่าการฯ มากที่สุด คัดผู้สมัครนั้นออก แล้วจัดเลือกตั้งครั้งที่สอง เพื่อเลือกผู้ได้รับคะแนนเสียงสูงสุดให้เป็นผู้ว่าการฯ

ปรากฏว่า ดร. ชื่นชอบ ยังไม่ทันได้ยื่นบันทึกเล่มใดเล่มหนึ่งให้แก่เจ้าหน้าที่ผู้ดำเนินการเลือกตั้งก็ต้องเดินทางไปต่างประเทศ เจ้าหน้าที่จึงดำเนินการเลือกตั้งไปเพียงครั้งเดียวและ วิจิตร ได้รับคะแนนเสียงสูงสุด 600 คะแนน ผู้ได้รับคะแนนเสียงลดหลั่นลงไป คือ วาทะ ได้ 500 คะแนน และ โวหารได้ 400 คะแนน ดังนั้น วิจิตร จึงได้รับการแต่งตั้งให้เป็นผู้ว่าการฯ คนใหม่

<u>ตัวอย่างที่ 14</u>

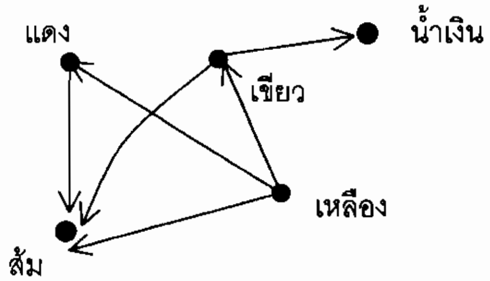
ถ้า แดง ส้ม เหลือง เขียว และ น้ำเงิน เป็นเพื่อนรุ่นเดียวกันบุคคลทั้ง ห้าจะมีการพูดคุยและเล่าเรื่องที่ได้ยินมาดังนี้คือ

1. เมื่อแดงได้ยินข่าวมา จะส่งข่าวต่อให้ส้ม ส่วนส้มจะไม่บอกข่าวใด ๆ ที่ได้ยินมาให้แดง แต่จะบอกข่าวต่อให้เหลือง กับ เขียว
2. เมื่อเหลืองได้ยินข่าว จะบอกข่าวต่อให้แดง เขียว และส้ม
3. เมื่อเขียวได้ยินข่าว จะบอกต่อให้ส้ม และน้ำเงิน
4. น้ำเงินเมื่อได้ยินข่าวจะเก็บเงียบไม่บอกใคร

ให้ใช้กราฟระบุทิศทาง แสดงการกระจายข่าวในกลุ่มเพื่อนทั้งห้าคน

<u>วิธีทำ</u>

ให้จุดยอดแทนบุคคลทั้ง 5 และเส้นเชื่อมระบุทิศทาง แสดงการส่งข่าวคือจะได้กราฟระบุทิศทางแสดงทิศทางการกระจายข่าวลือดังนี้



<u>ตัวอย่างที่ 15</u>

ผู้เชี่ยวชาญของบริษัทใหญ่แห่งหนึ่งต้องการให้คณะกรรมการของรัฐออกกฎหมายที่จะเป็นประโยชน์ต่อบริษัท ซึ่งขอนโยบายที่ดีที่สุด คือ ให้ได้รับการสนับสนุนจากสมาชิกที่มีอิทธิพลมากที่สุดในกลุ่มกรรมการ และจากข้อมูลตลอดจนประสบการณ์ผู้เชี่ยวชาญได้ข้อสรุปเกี่ยวกับกรรมการดังนี้ คือ

กรรมการ	กรรมการได้รับอิทธิพล
อนิรุธ (A)	คนึงนิจ เพชรไพร ฟ้าสวย
บัญชี (B)	ฟ้าสวย
คนึงนิจ (C)	บัญชี เพชรไพร
ดวงพร (D)	บัญชี คนึงนิจ เพชรไพร
เพชรไพร (E)	บัญชี
ฟ้าสวย (F)	คนึงนิจ เพชรไพร

(ก) ถ้าความสัมพันธ์ในแบบ มีอิทธิพลเหนือ เป็นแบบชั้นเดียว เช่น ถ้าอนิรุจมีอิทธิพลต่อคนึงนิจ คนึงนิจต้องไม่มีอิทธิพลเหนืออนิรุจ ให้เขียนกราฟระบุทิศทางแสดงความสัมพันธ์ตามตาราง

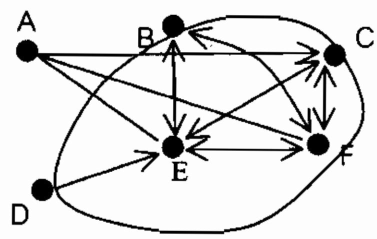
(ข) ถ้าผลกระทบของการมีอิทธิพลเหนือมีลักษณะเป็นแบบสองชั้น นั่นคือถ้าอนิรุธมีอิทธิพลเหนือคนึงนิจ และคนึงนิจมีอิทธิพลเหนือบัญชี สรุปได้ว่าอนิรุธมีอิทธิพลเหนือบัญชี จะเขียนตารางแสดงให้เห็นว่ากรรมการคนใดมีอิทธิพลเหนือแบบชั้นเดียว และแบบสองชั้น เป็นจำนวนเท่าใด

(ค) ถ้ากำหนดว่าผู้มีอิทธิพลมากที่สุด คือ ผู้ที่มีจำนวนรวมของอิทธิพลเหนือแบบชั้นเดียว กับแบบสองชั้นมากที่สุด ให้ใช้ผลจากข้อ (ข) สรุปลำดับขีดชั้นของกรรมการที่มีอิทธิพลสูงสุดจนถึงผู้มีอิทธิพลน้อยที่สุด

(ง) ผู้เชี่ยวชาญควรจะชักชวนกรรมการผู้ใดบ้าง

วิธีทำ

(ก) ให้จุดยอดแทนกรรมการ และเส้นเชื่อมระบุทิศทางมีทิศทางจาก กรรมการ A ไปยัง B ถ้า A มีอิทธิพลเหนือ B เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นแบบชั้นเดียว กราฟระบุทิศทางที่ต้องการคือ



(ข) เพื่อความสะดวกใช้ตารางแสดงจำนวนเส้นเชื่อมยาว 1 หน่วย และ 2 หน่วย (มีอิทธิพลเหนือแบบชั้นเดียว และแบบสองชั้น) ระหว่างจุดยอด ดังนี้

กรรมการ	A	B	C	D	E	F
A	0	2	2	0	3	1
B	0	0	1	0	1	1
C	0	2	0	0	1	1
D	0	3	1	0	2	1
E	0	1	0	0	0	1
F	0	2	1	0	2	0

จำนวน 1 2 และ 3 คือจำนวนวิถีซึ่งมีความยาว 1 หรือ 2 จากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่ง เช่น จากจุดยอด A ถึง E มี 3 วิถี คือ วิถี AE วิถี ACE และวิถี AFE จากจุดยอด C ถึง B มี 2 วิถี คือ วิถี CB กับวิถี CEB กล่าวโดยสรุป คือ อนิรุธ (A) มีอิทธิพลเหนือเพชรไพร (E) ได้ 3 ทาง ส่วนคนึงนิจ (C) มีอิทธิพลเหนือบัญชีได้ 2 ทาง

(ค) สรุปผลจากตารางในข้อ (ข) เมื่อรวมจำนวนในแต่ละแถวจะพบว่า

กรรมการ	A	B	C	D	E	F
รวมจำนวนในแต่ละแถว	8	3	4	7	2	5

อนิรุธ (A) มีอิทธิพลมากที่สุดรองลงไปคือ ดวงพร (D) ฟ้าสวย (F) คนึงนิจ (C) บัญชี (B) และเพชรไพร

(ง) จากผลลัพธ์ในตารางของข้อ (ค) ผู้เชี่ยวชาญควรจะเข้าหาและชักจูงกรรมการซึ่งมีอิทธิพลสูงสุดอย่างน้อย 2 ราย คือ อนิรุธ กับ ดวงพร

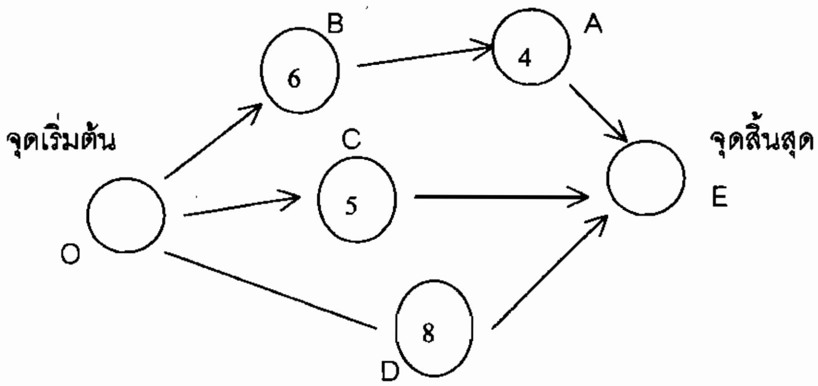
<u>ตัวอย่างที่ 16</u> (ด้านการจัดการและการวางแผนงานที่มีเวลากำหนด)

บริษัท FRESHY ต้องการปรับปรุงห้องว่าของสำนักงานให้เป็นห้องออกกำลังกาย จำเป็นต้องมีการติดตั้งฝ้าเพดานใหม่ ปูพรมพื้นห้องติดกระดาษฝาผนัง และติดตั้งเครื่องออกกำลังกาย ถ้าผู้จัดการต้องการให้งานนี้สำเร็จลงด้วยช่างมืออาชีพ และกำหนดให้งานเสร็จสิ้นภายในระยะเวลาอันรวดเร็ว จงหาว่าจะใช้แผนงานจัดการอย่างไร เพื่อให้งานสำเร็จในเวลาอันสั้น ถ้ากำหนดเวลาการใช้งาน แต่ละอย่างดังนี้

	งาน	เวลาที่ใช้ (ชั่วโมง)
A	ติดตั้งเครื่องออกกำลังกาย	4
B	ปูพรมพื้นห้อง	6
C	ติดกระดาษฝาผนัง	5
D	ติดฝ้าเพดาน	8

<u>วิธีทำ</u>

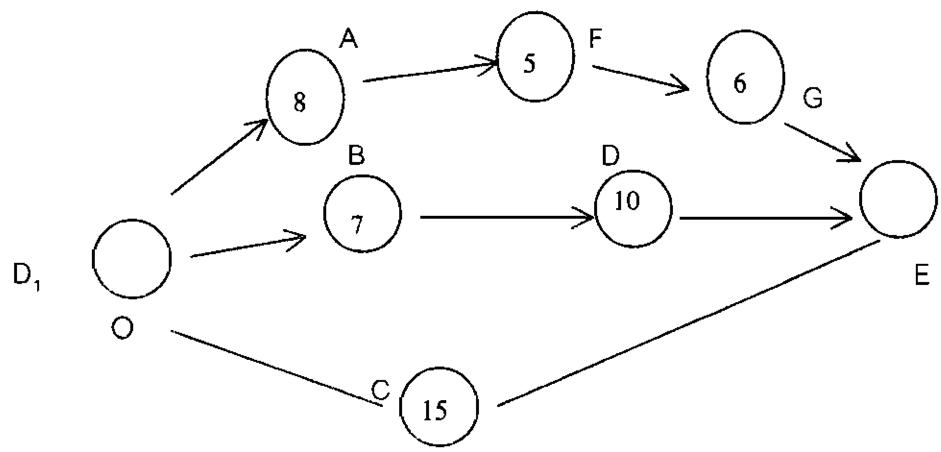
เพราะการติดตั้งเครื่องออกกำลังกายจะทำได้ก็ต่อเมื่อได้ปูพรมพื้นห้องแล้วส่วนการติดกระดาษฝาผนัง และการติดฝ้าเพดาน สามารถทำไปพร้อม ๆ กับการปูพรมพื้นห้อง ดังนั้น สามารถใช้กราฟระบุทิศทางแสดงขั้นตอนและเวลาการทำงานได้



จะเห็นได้ว่างานทั้ง 4 อย่าง ใช้เวลาทั้งหมด 4 + 6 + 5 + 8 = 23 ชั่วโมง แต่จากกราฟระบุทิศทางเวลาที่ใช้ทั้งหมดเพียง 10 ชั่วโมง เพราะขณะที่ใช้เวลาปูพรมพื้นห้อง (6 ช.ม.) และติดตั้งเครื่องออกกำลังกาย (4 ช.ม.) ผู้ควบคุมงานสามารถให้ช่างติดกระดาษฝาผนัง (5 ช.ม.) และติดฝ้าเพดาน (8 ช.ม.) ทำงานไปพร้อม ๆ กันได้ โดยไม่ต้องรอให้งานปูพรมพื้นห้องและงานติดตั้งเครื่องออกกำลังกายทำเสร็จก่อน เป็นการประหยัดเวลาได้ ถึง 13 ชั่วโมง

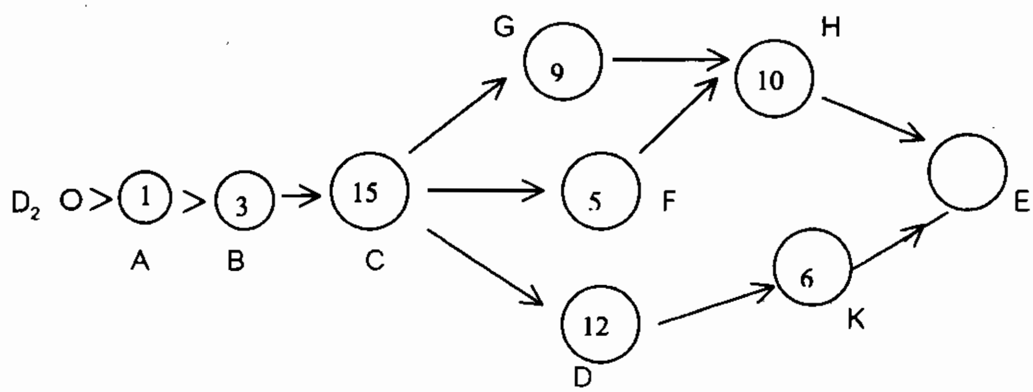
<u>บทนิยาม 4.2.1</u>
วิถีสำคัญที่สุดของกราฟระบุทิศทาง คือวิถีซึ่งยาวที่สุด

<u>ตัวอย่างที่ 17</u>
วิถีสำคัญของกราฟระบุทิศทาง D_1



คือ วิถี O, A, F, G, E ซึ่งยาวที่สุดเท่ากับ 19 หน่วย

<u>ตัวอย่างที่ 18</u>
วิถีสำคัญของกราฟ D_2



คือ O, A, B, C, G, H, E ซึ่งยาวที่สุดเท่ากับ 38 หน่วย

เทคนิคในตัวอย่างข้างต้นเหล่านี้ได้จาก <u>วิธีประเมินโครงการและการตรวจสอบ โดยใช้การหาวิถีสำคัญที่สุดจากกราฟระบุทิศทาง</u> ดังเช่น ในกราฟตัวอย่างที่ 16 มีวิถีสำคัญ 1 วิถี คือ O,B,A,E ตัวอย่างที่ 17 มีวิถีสำคัญ O,A,F,G,E 1 วิถี เป็นต้น การใช้วิธีการหาวิถีสำคัญนี้ได้จากหลักการของทฤษฎีต่อไปนี้ คือ

<u>ทฤษฎี 4.4</u>
ถ้า D เป็นกราฟระบุทิศทางซึ่งแทนโครงการที่กำหนดให้ ระยะเวลาซึ่งสั้นที่สุดในการดำเนินงานตามโครงการให้เสร็จสิ้นจะเท่ากับความยาวของวิถีสำคัญที่สุดของกราฟ D

<u>พิสูจน์</u>

ให้ P เป็นวิถี O = v_1, v_2,.........., v_n = E หรือวิถีสำคัญที่สุดของ D และมีความยาวหรือระยะเวลาเท่ากับ t เพราะว่างาน v_i , $O \le i \le n$ จะเริ่มเมื่องาน v_{i-1} เสร็จสิ้น ดังนั้น เวลาทั้งหมดในการดำเนินงานตามโครงการต้องไม่น้อยกว่า t (เพื่อแสดงให้เห็นว่างานต่าง ๆ ทำได้ในช่วงเวลา t)

ให้ A เป็นงานใด ๆ ในโครงการ ถ้า A เป็นงานในวิถี P แสดงว่างาน A ทำได้เสร็จสิ้นในเวลา t ถ้า A เป็นงานนอกวิถี P เช่น A อยู่ในวิถี Q ซึ่งมีจุดเริ่มต้น – จุดสิ้นสุด และเป็นวิถีซึ่งยาวที่สุด เนื่องจากวิถี

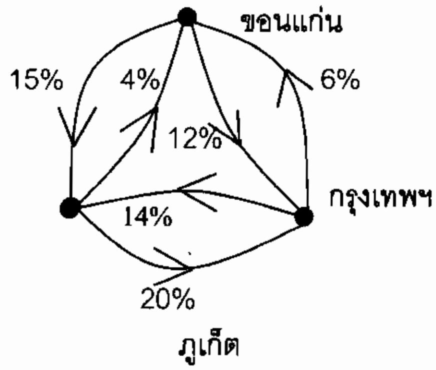
Q ต้องเริ่มต้นที่ O และ สิ้นสุดที่ E ร่วมกันกับวิถี P แสดงว่ามีวิถีย่อย Q_1 คือ $w_o, w_1, \ldots\ldots\ldots, w_k$ ของ Q ซึ่ง A อยู่ใน Q_1 $w_o = v_i$ และ $w_k = v_j$ สำหรับ $O \leq i \leq j \leq n$ และไม่มีจุดใดใน $w_1, v_2, \ldots\ldots, w_{k-1}$ ซึ่งอยู่ในวิถี P อย่างไรก็ตามเพราะว่า P เป็นวิถีสำคัญที่สุดแสดงว่า P เป็นวิถี $O = v_1, \ldots\ldots, v_i = w_o, w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_k, = v_j, v_{j+1}, \ldots\ldots, v_n = E$ ซึ่งยาวที่สุดและเท่ากับ t

ดังนั้น งาน $w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_{k-1}$ (รวมทั้ง A) ของ Q ดำเนินไปในขณะที่กำลังดำเนินงาน $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots\ldots v_{i-j}$ ใน P และเพราะว่า A เป็นจุดใด ๆ ดังนั้น งานทั้งหมดทำได้เสร็จสิ้นในเวลา t

❁ ❁ ❁ ❁ ❁ ❁ ❁

แบบฝึกหัด

1. จากกราฟระบุทิศทางที่กำหนดให้



ให้หาจำนวน

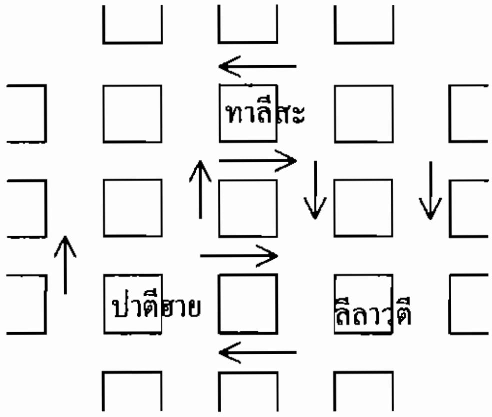
1.1 ประชากรขอนแก่นย้ายเข้ากรุงเทพมหานคร

1.2 ประชากรที่ย้ายจากภูเก็ตเข้ากรุงเทพมหานคร และขอนแก่น

1.3 ประชากรจำนวน 14 % จากกรุงเทพมหานครย้ายไปจังหวัดใด

2. พี่น้องสามคน คือ บุษบา ราตรี และสีไพร ต้องโทรศัพท์ถึงแสงดาวผู้เป็นแม่ ส่วนแสงดาวจะโทรศัพท์ถึงราตรี และไม่โทรศัพท์ถึงลูกสาวอีกสองคน ส่วนสีไพรจะไม่โทรศัพท์ถึงราตรี ในขณะที่ราตรีเป็นฝ่ายโทรศัพท์ถึงสีไพร บุษบาและสีไพรต่างโทรศัพท์ถึงกันและกัน เช่นเดียวกับที่บุษบาและราตรีต่างโทรศัพท์ถึงกันและกัน ให้สร้างกราฟระบุทิศทางที่จำลองสถานะการณ์การโทรศัพท์ระหว่างบุคคลทั้งสี่

3. ตามแผนผังข้างล่างนี้ แสดงที่ตั้งของสถาบันศิลป์ 3 แห่ง คือ ทาลีสะ ปาตีฮาย และลีลาวดี ซึ่งอยู่ในเขตรถเดินทางเดียว ถ้าบุรุษไปรษณีย์ต้องการจะขับรถไปส่งพัสดุยังสถาบันศิลป์ทั้ง 3 แห่ง โดยให้ผ่านตึกเป็นจำนวนน้อยที่สุด (ระยะทางต่ำสุด) บุรุษไปรษณีย์ควรจะใช้เส้นทางใด



และถ้าบุรุษไปรษณีย์เริ่มต้นจากสถาบันศิลป์แห่งใดแห่งหนึ่ง เช่น ทาลีสะ จะมีเส้นทางส่งพัสดุที่สามารถส่งพัสดุไปยังสถาบันศิลป์อีก 2 แห่ง แล้วกลับมายังทาลีสะได้หรือไม่ และถ้ามี วงจรที่เริ่มต้นจากทาลีสะนี้มีเพียงวงจรเดียว หรือมีมากกว่า 1 วงจร

4. สายการบิน ฟ้าสีคราม มีเที่ยวบินประจำวัน 9 แห่ง ระหว่างสถานที่ต่าง ๆ คือ

103	จาก A	ถึง H	106	จาก H	ถึง A
201	จาก B	ถึง C	203	จาก B	ถึง D
204	จาก D	ถึง B	301	จาก D	ถึง R
305	จาก C	ถึง M	308	จาก H	ถึง B
401	จาก R	ถึง C			

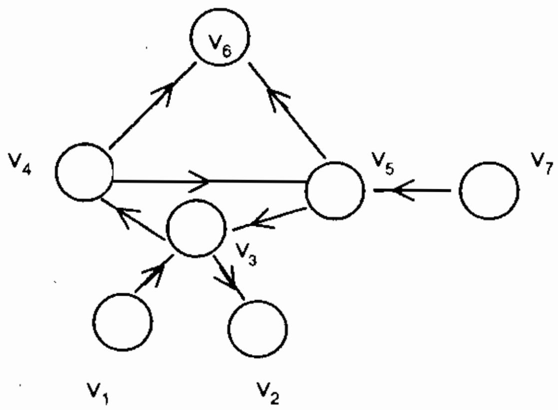
ให้เขียนกราฟระบุทิศทางแสดงเที่ยวบินดังกล่าว

5. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งวางแผนส่งเสริมการขาย ด้วยการลดราคา ในวันที่ 4 พฤษภาคม (เริ่มจริง 2 พฤษภาคม) ซึ่งตามแผนการจะต้องลงโฆษณา 8 หน้า และต้องให้เสร็จล่วงหน้า 10 วันก่อนถึงวันที่ 2 พฤษภาคม วันนี้ตรงกับวันที่ 2 มิถุนายน มีเวลาเหลือเพียง 30 วัน สำหรับงานทั้งหมดและเวลาที่ประเมินได้มีดังนี้

งาน	เวลาที่ใช้ (วัน)	งานที่ต้องทำก่อน
1. ฝ่ายจัดการ เลือกสินค้า	3	-
2. ฝ่ายจัดซื้อ เลือกสินค้า	2	-
3. เลือกและกำหนดราคาสินค้าเพื่อลงโฆษณา	2	1,2
4. จัดเตรียมงานศิลป	4	3
5. จัดเตรียมคำอธิบาย สินค้า	3	3
6. ออกแบบโฆษณาสินค้า	2	4,5
7. รวบรวมรายชื่อสินค้า	3	3
8. พิมพ์รายชื่อสินค้า	1	7
9. พร้อมโฆษณา	5	6
10. ใส่รายชื่อ	2	8,9
11. ส่งใบโฆษณาแจกตามบ้าน	10	10

จะเห็นได้ว่างานทั้งหมดใช้เวลารวมทั้งสิ้น 37 วัน แต่ห้างมีเวลาเหลือเพียง 30 วัน ให้ใช้วิธีการตรวจสอบและประเมินว่าห้างสรรพสินค้าจะสามารถจัดทำโฆษณาได้เสร็จสิ้นทันเวลาตามแผนส่งเสริมการขายหรือไม่

6. จากกราฟ D



ให้หาว่ามีวิถีต่อไปนี้ในกราฟ D หรือไม่

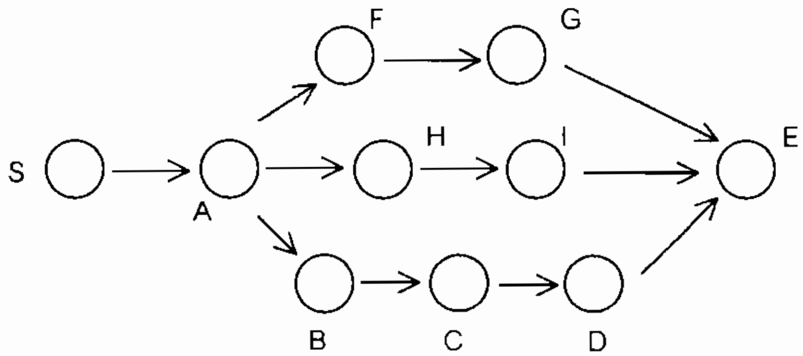
6.1 วิถี $v_7 - v_1$

6.2 วิถี $v_7 - v_6$

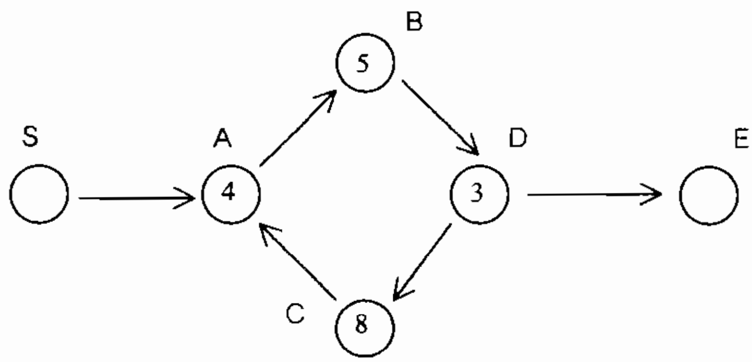
6.3 วิถี $v_1 - v_6$

6.4 วิถี $v_4 - v_2$

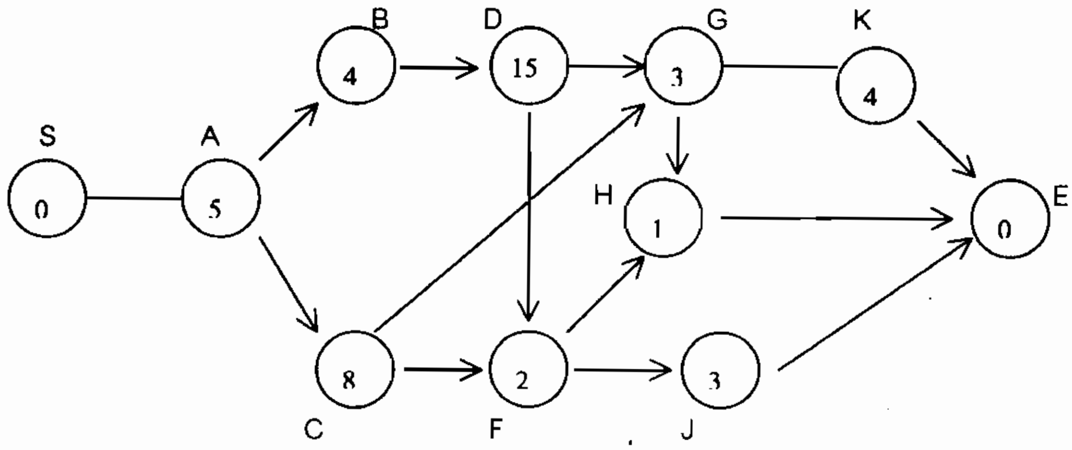
7. ให้ใส่ตัวเลขตามใจชอบแสดงเวลาในแต่ละจุดของกราฟที่กำหนดให้ แล้วหาวิถีสำคัญของกราฟ



8. ให้อธิบายว่ากราฟระบุทิศทางต่อไปนี้ใช้ประเมินโครงงานได้หรือไม่เพราะเหตุใด



9. แผนงานสร้างของเล่นสำหรับเด็กกำหนดได้ด้วยกราฟ D ดังนี้



ให้หาวิถีสำคัญของกราฟ

10. ไพรินทร์ สุวรรณา จิรพัช และนันทรัตน์ พักร่วมกันในอาคารชุด PARADISE DESIRE เนื่องจากในวันที่ 1 มีนาคม เป็นวันครบรอบวันเกิดของจิรพัช เพื่อนทั้ง 3 คน จึงวางแผนจัดงานสังสรรวันเกิดให้จิรพัช ในวันที่ 1 มีนาคม เวลา 19.00 น. กิจกรรมที่ต้องทำมีดังนี้

1.	ปูผ้าคลุมโต๊ะ
2.	จัดดอกไม้ใส่แจกันวางบนโต๊ะ
3.	จัดวางจานและช้อนส้อมบนโต๊ะ
4.	จัดเตรียมน้ำดื่ม และน้ำแข็ง
5.	จัดวางขวดไวน์ และถ้วยแก้วดื่มไวน์บนโต๊ะ
6.	จัดเตรียมเครื่องเสียงพร้อม KARAOKE
7.	สั่งอาหารให้มาส่งในงานเลี้ยง
8.	ติดต่อชวนเพื่อนต่างห้องพักอีก 4 คน มาร่วมงาน

ให้กำหนดเวลาที่ต้องใช้ในแต่ละงาน ลำดับงานก่อนหลัง แล้วสร้างกราฟระบุทิศทาง พร้อมทั้งหาวิถีสำคัญของกราฟ

11. บริษัทธุรกิจขนาดใหญ่ต้องการจัดสถานที่พักผ่อนหย่อนใจในอวกาศด้วยการลงทุนมหาศาลเพื่อการท่องเที่ยวในอนาคต เพื่อให้การจัดสร้างเสร็จสิ้นทันกำหนดเวลา ให้ใช้วิธีการตรวจสอบประเมินผลในโครงงานและหาวิถีสำคัญของงานต่าง ๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

	งาน	**เวลาที่ใช้ (เดือน)**
1.	ฝึกแรงงานก่อสร้าง	6
2.	สร้างผนังด้านนอกของสถานที่	8
3.	สร้างระบบช่วยชีวิต	14
4.	รับสมัครผู้เข้าพักในสถานที่	12
5.	ติดตั้งผนังสถานที่	10
6.	ฝึกหัดผู้สมัครเข้าพักในสถานที่	10
7.	ติดตั้งระบบช่วยชีวิต	4
8.	ติดตั้งระบบพลังงานแสงอาทิตย์	3
9.	ทดสอบระบบช่วยชีวิตและระบบพลังงาน	4
10.	นำผู้สมัครไปยังสถานที่พัก	4

ลำดับงานที่ต้องทำก่อนหลังมีดังนี้

งาน	งานที่ต้องเสร็จก่อน
1	-
2	-
3	-
4	-
5	1,2
6	2,3,4
7	1,2,3,5
8	1,2,5
9	1,2,3,5,7,8
10	1,2,3, ...9

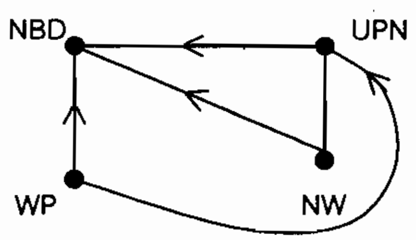
12. ในการแข่งขันฟุตบอลเยาวชนแห่งชาติมีผลการแข่งขันดังนี้

ทีม	A	B	A	D	D
ชนะทีม	R	C	C	A	E

ให้จำลองผลการแข่งขันด้วยกราฟระบุทิศทาง

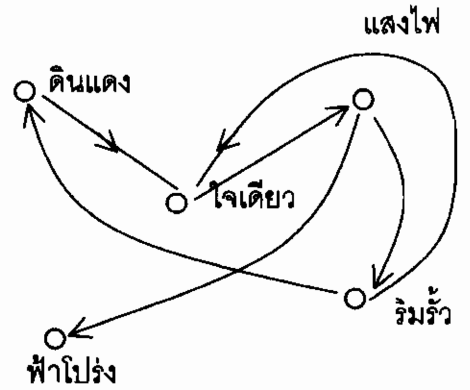
13. กระต่ายและกวางในทวีปอัฟริกา เป็นสัตว์กินพืชผักเป็นอาหาร ส่วนสิงห์โต หมาใน เสือดาว และมนุษย์กินกระต่ายและกวางเป็นอาหาร ให้จำลองสถานะการณ์ด้วยกราฟระบุทิศทาง

14. สำนักข่าว 4 แห่ง เสนอข่าวชนิดเดียวกันซึ่งแยกประเภทแล้ว โดยมีระบบการส่งข่าวสารระหว่างสำนักข่าวทั้ง 4 แห่ง ดังรูป



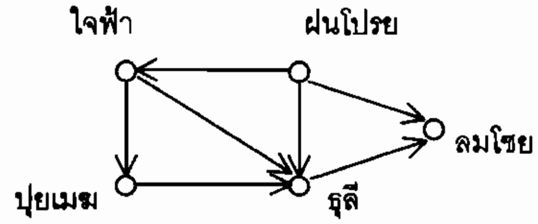
ให้หาสำนักข่าวซึ่งได้รับข่าวเป็นแห่งแรก

14. จากกราฟต่อไปนี้แสดงทิศทางการกระจายข่าวลือในกลุ่มบุคคล 5 คน



ให้อธิบายว่าบุคคลใดน่าจะเป็นผู้เริ่มกระจายข่าวลือ

16. ในหน่วยราชการแห่งหนึ่ง มีแบบฟอร์มของราชการซึ่งต้องมีผู้อนุมัติลงนาม จำนวน 5 คน ซึ่งใน 5 คนนี้ คนหนึ่งจะลงนามก็ต่อเมื่ออีกคนหนึ่งลงนามเรียบร้อยแล้ว สถานการณ์ดังกล่าวจำลองด้วยกราฟได้ดังนี้



เส้นระบุทิศทางจากฝนโปรยไปยังใจฟ้า แสดงว่าฝนโปรยต้องลงนามก่อนใจฟ้า จึงจะลงนาม เป็นต้น ถ้าผู้ติดต่อต้องถือแบบฟอร์มไปให้บุคคลทั้ง 5 ลงนามตามลำดับ ให้หาลำดับการติดต่อขออนุมัติตามแบบฟอร์ม

17. บริษัท BIOLINE ได้ออกแบบสอบถามเรื่องเกี่ยวกับการใช้สินค้าชนิดเดียวกัน 5 แบบ พบว่าลำดับความชอบของลูกค้าแตกต่างกันตามแบบดังนี้

แบบ	A	B	C	D	E
ชอบมากกว่า	B	E	B	A	A
	C		D	B	
			E	E	

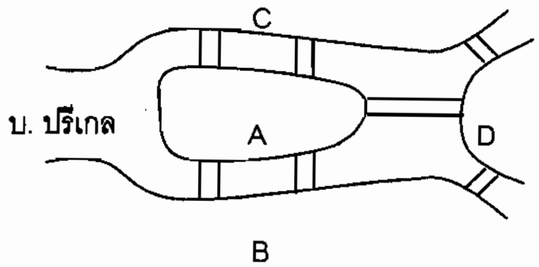
ให้จำลองสถานะการณ์ด้วยกราฟระบุทิศทาง แล้วเรียงลำดับสินค้าแบบที่มีลูกค้าชอบใช้มากที่สุดตามวิธีการแบบ 1 – 2 ขั้นตอน เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการผลิตสินค้าต่อไป

บทที่ 5
กราฟแบบออยเลอร์

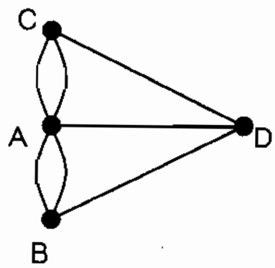
5.1 นำเรื่อง

ในช่วงพุทธศตวรรษที่ 24 เขตปรัสเซียตะวันออกมีเมือง ๆ หนึ่ง ชื่อ โคนิกสเบร์ก ซึ่งประกอบด้วยเกาะสองเกาะล้อมรอบด้วยแม่น้ำปรีเกล เกาะทั้งสองติดต่อกับแผ่นดินใหญ่ด้วยสะพาน 7 แห่ง กล่าวกันว่าชาวเมืองโคนิกส์เบอร์กหาความเพลิดเพลินให้ตนเองด้วยการเดินท่องเที่ยวทั่วเมืองและชมวิวสะพานทุกแห่งโดยพยายามใช้สะพานเพียงแห่งละหนึ่งครั้งแต่ทำไม่สำเร็จในที่สุดชาวเมืองเชื่อว่าทำไม่ได้แต่ไม่มีผู้ใดพิสูจน์ไว้ จนกระทั่งในปี พ.ศ. 2279 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้พิสูจน์ไว้ในผลงาน ชื่อ Solutio Problematis ad geometrium situs pertinentis ว่าเป็นไปไม่ได้ การพิสูจน์เป็นการเริ่มต้นของทฤษฎีกราฟ มีแนวความคิดในการพิสูจน์เป็นแบบของทฤษฎีกราฟโดยชัดเจน

ตามวิธีทางของออยเลอร์ ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก มีการใช้รูปแบบของกราฟคือ การกำหนดให้จุดยอด แทนพื้นที่เมืองทั้ง 4 แห่ง และกำหนดให้เส้นเชื่อมแทนสะพาน ดังนี้



โคนิกสเบอร์ก



กราฟ G

จะเห็นได้ว่าปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก คือปัญหาที่ต้องการคำตอบว่ากราฟ G ตามรูปข้างต้นมีรอยเดิน (หรือวงจร) ซึ่งรวมเส้นเชื่อมทั้งหมดใน G หรือไม่ ปัญหานี้อาจใช้วิธีลองผิดลองผิด แต่ต้องใช้เวลามากและในกรณีที่มีสะพานจำนวนมากจะซับซ้อนและใช้เวลามากขึ้น ออยเลอร์จึงหาวิธีการตอบปัญหานี้โดยใช้กราฟมาช่วยในการพิสูจน์ ดังต่อไปนี้

<u>ปัญหาสะพานเมืองโคนิกสเบอร์ก</u>

<u>ทฤษฎีบท 6.2.1</u>

กราฟ G ของปัญหาสะพานโคนิกสเบอร์ก ไม่มีรอยเดินที่ประกอบด้วยเส้นทั้งหมด

<u>พิสูจน์</u> (การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง)

ถ้ากราฟ G มีรอยเดิน P ซึ่งรวมทุกเส้นในกราฟ รอยเดิน P จะต้องเริ่มต้นที่จุดยอดใดจุดยอดหนึ่ง คือ จุด Aหรือ B หรือ C หรือ D และมาสิ้นสุดที่จุดยอด A หรือ B หรือ C หรือ D จุดใดจุดหนึ่งและเพราะว่าจะต้องมีจุดยอดอย่างน้อย 2 จุด ในกลุ่ม A,B,C,D ซึ่งไม่ได้เป็นทั้งจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ถ้าให้จุดยอด v เป็นจุด ในกลุ่ม A,B,C ซึ่งไม่เป็นจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุด เนื่องจากจุดยอด A,B,C มีดีกรีเท่ากับ 3 หรือ 5 ดังนั้นเมื่อมีรอยเดินของ P เข้ามาที่จุด v จะต้องมีรอยเดินของ P ออกจาก v จึงเหลือเส้นเชื่อมของ v หนึ่งเส้น ที่รอยเดิน P จะต้องผ่านเพราะยังไม่ได้ใช้แต่เมื่อใช้เส้นเชื่อมที่เข้ามาที่ P จะไม่มีเส้นเชื่อมออกจาก v แสดงว่ารอยเดินของ P ต้องมาสิ้นสุดที่จุดยอด v ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะขัดแย้งกับข้อที่กำหนดในตอนแรกว่าจุดยอด v ไม่เป็นจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุด จึงสรุปได้ว่าไม่มีรอยเดิน P ซึ่งรวมทุกเส้นในกราฟ G

จากปัญหาของสะพานโคนิกสเบอร์ก ทำให้ได้บทนิยามเรื่องพหุกราฟตามชื่อของออยเลอร์ ดังนี้

<u>บทนิยาม 5.2.1</u>

รอยเดินที่รวมจุดยอดและเส้นเชื่อมทั้งหมดของพหุกราฟ G ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดเดียวกัน เรียกว่า <u>วงจรแบบออยเลอร์</u> และสำหรับกราฟที่มีวงจรแบบออยเลอร์ เรียกว่า <u>กราฟแบบออยเลอร์</u>

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟแบบออยเลอร์

จากงานที่เกี่ยวข้องกับกราฟของออยเลอร์ได้นำไปสู่ทฤษฎีดังต่อไปนี้

5.3 <u>กราฟแบบออยเลอร์</u>

<u>ทฤษฎีบท 5.3.1</u>

กราฟ G เป็นกราฟแบบออยเลอร์ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ G มีความเชื่อมโยงและจุดยอดทุกจุดใน G มีดีกรีเป็นคู่

<u>พิสูจน์</u>

$\Rightarrow$ ถ้า G เป็นกราฟแบบออยเลอร์ G จะต้องมีวงจรแบบออยเลอร์วงจรแบบออยเลอร์สิ้นสุดที่จุดยอดเดียวกัน ให้ C เป็นวงจรแบบออยเลอร์ และมี v เป็นจุดเริ่มต้น และสิ้นสุด เพราะว่า C รวมจุดทั้งหมดใน G ดังนั้นทุก ๆ 2 จุดใน G จะต้องมีรอยเดิน และวิถี นั่นคือ G มีความเชื่อมโยง (เพื่อแสดงว่าทุกจุดยอดใน G มีดีกรีเป็นคู่)

<u>ขั้นแรก</u>

ถ้าจุดยอด u ใน G แตกต่างจากจุดยอด v แสดงว่า u ไม่ใช่จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดของวงจร C ดังนั้น เมื่อมีเส้นเชื่อมเข้ามาที่จุด u จะต้องมีเส้นเชื่อมออกจากจุด u นั่นคือ จุดยอด u มีดีกรีเป็นคู่ (ถ้ามีเส้นเชื่อมเพิ่มจะเพิ่มครั้งละ 2 เส้น)

<u>ขั้นที่สอง</u>

เพราะว่า v เป็นจุดเริ่มต้นและสิ้นสุด จึงมีดีกรีเป็นคู่เสมอ ดังนั้น จุดยอดใน G ทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่

$\Leftarrow$ ในทางกลับกัน ถ้า G เชื่อมโยง และจุดยอดทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่ (เพื่อแสดงว่า G เป็นกราฟแบบออยเลอร์) เลือกรอยเดิน P ใน G โดยเริ่มที่จุด v และให้ P รวมจุดใน G ให้มากที่สุดมาจนถึงจุด w ซึ่งจะเดินต่อไปอีกไม่ได้ นั่นคือ สิ้นสุดที่จุด w แสดงว่า $w = v$

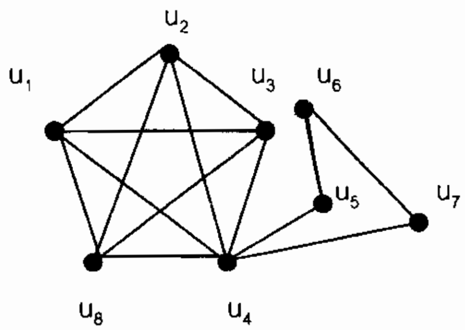
<u>ถ้า $w \neq v$</u> แสดงว่ารอยเดิน P ไม่สิ้นสุดที่ w ดังนั้น จะต้องมีเส้นเชื่อมที่เข้าและออกจากจุด w เพราะถ้ามีเส้นเชื่อมเข้าที่จุด w แต่ไม่มีเส้นเชื่อมออกจุด w จะมีดีกรีเป็นคี่ ขัดแย้งกับสมมุติฐานในตอนแรก หรือถ้าเส้นเชื่อมที่เข้ามาที่จุด w ไม่อยู่ใน P ก็แสดงว่ารอยเดิน P มีเส้นเชื่อมต่อไปได้อีก ไม่สิ้นสุดที่ w ดังนั้น สรุปได้ว่าเมื่อรอยเดิน P สิ้นสุดที่ w จะต้องได้ $w = v$ และรอยเดิน P เป็นวงจร และเนื่องจากวงจร P รวมเส้นเชื่อมใน G จึงเรียกว่า P เป็นวงจรแบบออยเลอร์ และ G เป็นกราฟแบบออยเลอร์

สมมุติว่ามีกรณีที่รอยเดิน P ไม่ได้รวมทุกเส้นเชื่อมใน G แต่เนื่องจาก G มีความเชื่อมโยง ดังนั้น อย่างน้อยที่สุดจะต้องมีจุดยอดจุดหนึ่งใน P ที่โยงกันเส้นเชื่อมอื่น ๆ ที่อยู่นอก P ในกรณีเช่นนี้ ให้เริ่มรอยเดิน P_1 ต่อจาก P เข้าไปตามจุดและเส้นเชื่อมของกราฟที่ P ยังไม่ได้รวมไว้ สมมุติว่าเริ่มรอยเดิน P_1 จากจุด u และไปตามเส้นเชื่อมให้รวมจุดมากที่สุด และ P_1 จะมาสิ้นสุดที่ u ตามแนวคิดนี้แสดงว่า มีวงจรอื่น เช่น C ใน G ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุด v โดย C มีเส้นเชื่อมมากกว่าวงจร P โดย C เกิดจากการใส่วงจร P_1 เข้ากับวงจร P ที่จุด u ถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่า P ยังไม่ใช่วงจรแบบออยเลอร์ เพราะไม่ได้รวมจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นใน G

สรุปได้ว่าวงจร C คือ วงจร P + P_1 ดังนั้น ถ้าวงจร P เป็นวงจรแบบออยเลอร์ วงจร P จะรวมจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้น

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

จากกราฟ



จะเห็นได้ว่าถ้าวงจร P เป็น $u_1, u_2, u_3, u_4, u_8, u_1, u_3, u_8, u_2, u_4, u_1$ วงจร P ไม่ใช่วงจรแบบออยเลอร์ เพราะยังไม่รวมจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟมี u_4 เป็นจุดใน P ซึ่งโยงกับเส้นเชื่อมที่อยู่นอก P ดังนั้น ให้เริ่มรอยเดิน P_1 จาก u_4 ให้รวมจุดมากที่สุดในที่นี้ P_1 คือ u_4, u_5, u_6, u_7, u_4 ซึ่งเมื่อรวมกับ P_1 ที่จุด P ที่จุด u_4 ได้วงจรแบบออยเลอร์คือ P + P_1 หรือ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_4, u_8, u_1, u_3, u_8, u_2, u_4, u_1$

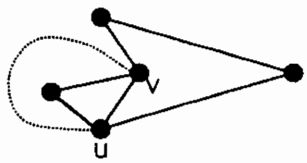
ทฤษฎีบท 5.3.2

กราฟ G เรียกว่า เป็นกราฟซึ่งมีวิถีแบบออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อกราฟ G มีความเชื่อมโยงและมีจุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นคี่ จำนวน 2 จุด

วิถีแบบออยเลอร์เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นคี่และไม่ใช่จุดยอดเดียวกัน

พิสูจน์

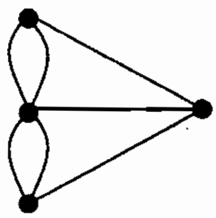
ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งมีวิถีแบบออยเลอร์ และให้จุดยอด u เป็นจุดเริ่มต้น จุดยอด v เป็นจุดสิ้นสุดของวิถี ถ้าเติมเส้นเชื่อมระหว่าง u กับ v จะได้กราฟแบบออยเลอร์ซึ่งจุดยอดทุกจุดมีดีกรีคู่ แสดงให้เห็นว่าเมื่อเอาเส้น e ออกจะได้ กราฟ G เดิมซึ่งมีเฉพาะจุดยอด u กับ v เท่านั้นที่เป็นจุดคี่



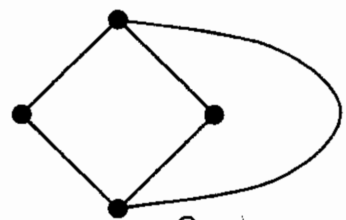
ในทางกลับกันถ้าให้กราฟ G มีจุดยอด u และ v เท่านั้นที่เป็นจุดคี่ เมื่อเติมเส้นเชื่อม e ระหว่าง u กับ v จะทำให้ได้กราฟเชื่อมโยง ซึ่งจุดยอดทุกจุดมีดีกรีคู่ ดังนั้น ตามทฤษฎีกราฟนี้ต้องเป็นกราฟแบบออยเลอร์ และต้องมีวงจรแบบออยเลอร์ ซึ่งเมื่อลบเส้น e ออกจากกราฟจะได้แนวเดินซึ่งรวมทุกเส้นเชื่อมใน G ดังนั้น G มีวิถีแบบออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 3

จากกราฟต่อไปนี้



G_1



G_2

จะเห็นได้ว่ากราฟ G_1 ไม่มีทั้งวงจรและวิถีแบบออยเลอร์ ส่วนกราฟ G_2 มีวิถีแบบออยเลอร์

ข้อสังเกต

ลักษณะเด่นประการหนึ่งของกราฟแบบออยเลอร์ หรือกราฟที่มีวิถีแบบออยเลอร์ คือ เมื่อกำหนดจุดยอดแล้วจะสามารถลากเส้นเชื่อมโยงจุดยอดทุกจุดได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่ต้องยกปากกาขึ้น ถ้าจุดยอดทุกจุดมีดีกรีเป็นคู่ แต่ถ้าจุดยอดมีดีกรีเป็นคี่ จะต้องมีได้เพียงสองจุดเท่านั้น

5.4 การหาวงจรแบบออยเลอร์

ต่อไปนี้เป็นขั้นตอนวิธีในการหาวงจรแบบออยเลอร์ของกราฟซึ่งจุดสำคัญ คือ สะพานหมายถึงเส้นเชื่อมในกราฟเชื่อมโยงซึ่งถ้าลบเส้นเชื่อมนี้ออกแล้วจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง

ขั้นตอนวิธีของฟลูรี

ถ้า G เป็นกราฟแบบออยเลอร์ จะมีขั้นตอนในการหาวงจรแบบออยเลอร์ ดังนี้

ขั้นแรก เลือกจุดเริ่มต้น v

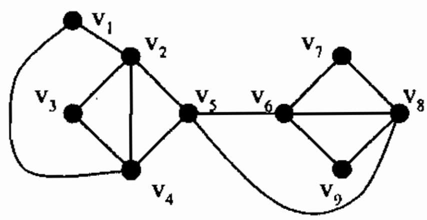
ขั้นที่สอง ในแต่ละขั้นให้ไปตามเส้นเชื่อมใด ๆ ที่มีอยู่และจะเลือกไปตามเส้นเชื่อมที่เป็นสะพานก็ต่อเมื่อไม่มีทางเลือกอื่น

ขั้นที่สาม หลังจากใช้เส้นเชื่อมใดแล้วให้ลบเส้นเชื่อมนั้นออก (ลบจุดยอดที่มีดีกรีศูนย์ด้วย) โดยไม่ให้กราฟขาดความเชื่อมโยงแล้วเลือกเส้นเชื่อมอื่น ๆ ต่อไป

ขั้นที่สี่ จบขั้นตอนวิธี เมื่อลบเส้นเชื่อมหมด

ตัวอย่างที่ 4

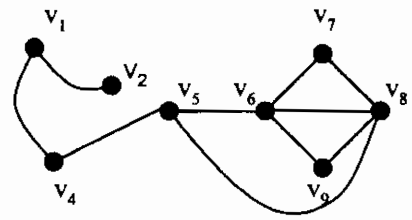
ให้แสดงว่ากราฟข้างล่างนี้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ แล้วใช้วิธีของฟลูรี หาวงจรแบบออยเลอร์



วิธีทำ

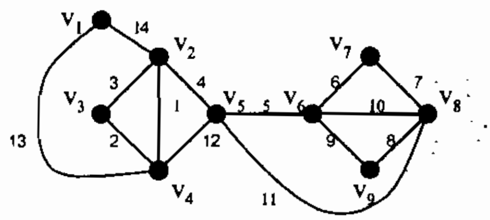
<u>ขั้นแรก</u> หาดีกรีของจุดยอดก่อน จะเห็นได้ว่าจุด v_1, v_3, v_7 และ v_9 มีดีกรีสองส่วนจุด v_2, v_4, v_5, v_6, และ v_8 มีดีกรีสี่ แสดงว่าทุดจุดมีดีกรีคู่กราฟเป็นแบบออยเลอร์

<u>ขั้นที่สอง</u> ใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรี จะเริ่มที่จุดใดก่อนก็ได้ ในที่นี้เริ่มที่จุด v_2 ไปตามเส้นที่โยงกับ v_2 เช่น v_2, v_4 (ลบ v_2, v_4 ออก) แล้วไปตามเส้นเชื่อมต่อ ๆ ไป คือ v_4, v_3, v_3 v_2 และ v_2, v_5 ตามลำดับ จะได้กราฟ



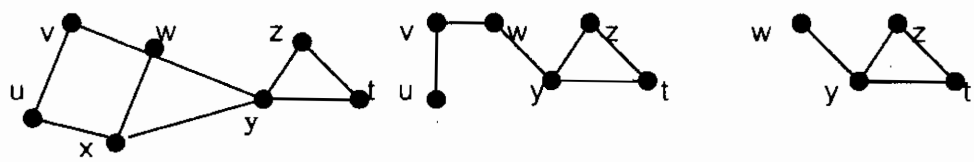
จะเห็นได้ว่าการลบในครั้งต่อไปต้องระมัดระวัง เพราะถ้าลบเส้น v_4, v_5 กราฟจะขาดความเชื่อมโยง ดังนั้น จึงลบเส้น v_5 v_6 ,v_6 v_7 ,v_7 v_8 ,v_8 v_9 (ไม่เลือกเส้น v_8 v_5 เพราะกราฟจะขาดความเชื่อมโยง เมื่อลบ v_8 v_5) v_9 v_8 ,v_6 v_8 ,v_8 v_5 ,v_5 v_4 ,v_4 v_1 และ v_1 v_2

เพื่อให้เห็นชัดเจนอาจใช้ตัวเลขลำดับของเส้นที่ลบดังนี้



ดังนั้นวงจรแบบออยเลอร์คือ v_2 v_4 v_3 v_2 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_6 v_8 v_5 v_4 v_1 v_2

<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



G_1 G_2 G_3

ตามขั้นตอนวิธีของฟลูรี

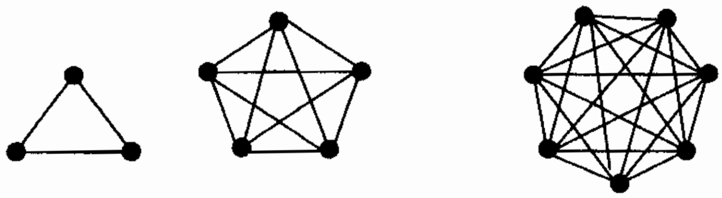
ขั้นแรก เลือกจุดเริ่มต้น y ใน G_1

ขั้นที่สอง เลือกเส้น yx ตามด้วย xw (ลบจุดยอด x) จะได้กราฟ G_2

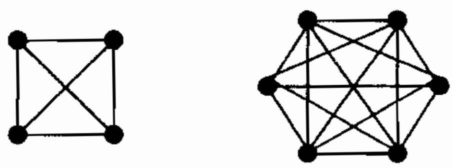
ขั้นที่สาม เลือกเส้น yw ไม่ได้เพราะเป็นสะพาน ดังนั้นเลือกเส้น uv ตามด้วย vw (ลบจุดยอด v) จะได้กราฟ G_3 ซึ่งจากนี้จะเห็นได้ว่าต้องเลือก wy แล้วไปตามวงเวียน yzty ได้วงจรแบบออยเลอร์ คือ yxuvwyzty

ในปี พ.ศ. 2350 อัล ปวงโซต์ ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟสมบูรณ์ K_n ที่สามารถเขียนได้โดยต่อเนื่อง หรือเขียนได้โดยไม่ต้องยกปากกาขึ้น คือกราฟที่มีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคี่ ส่วนที่มีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคู่จะทำไม่ได้

ตัวอย่างที่ 6



กราฟซึ่งเขียนได้โดยต่อเนื่อง มีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคี่



กราฟซึ่งมีจำนวนจุดยอดเป็นเลขคู่และเขียนไม่ได้โดยต่อเนื่อง

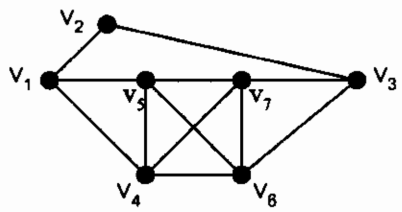
5.5 วิธีการสร้างกราฟแบบออยเลอร์

การประยุกต์ในบางกรณี จำเป็นต้องสร้างเส้นเชื่อมเพิ่มเติมหรือลบเส้นเชื่อมบางเส้นเพื่อทำให้กราฟที่ไม่เป็นแบบออยเลอร์กลายเป็นกราฟแบบออยเลอร์ เช่นในกรณีกราฟเชื่อมโยงซึ่งจุดยอด u กับ v ใน

กราฟเพียงสองจุดเท่านั้นที่เป็นจุดคี่ ถ้าสร้างเส้นเชื่อม จาก u ถึง v จะทำให้ดีกรีของจุดทั้งสองเพิ่มขึ้นอีกหนึ่ง เป็นดีกรีคู่ กราฟใหม่จะเป็นกราฟแบบออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 7

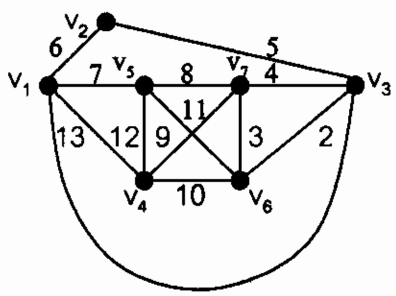
ให้สร้างเส้นเชื่อมเพิ่มเติมในกราฟที่กำหนดให้ เพื่อให้กราฟเป็นแบบออยเลอร์ และให้หาวงจรแบบออยเลอร์



วิธีทำ

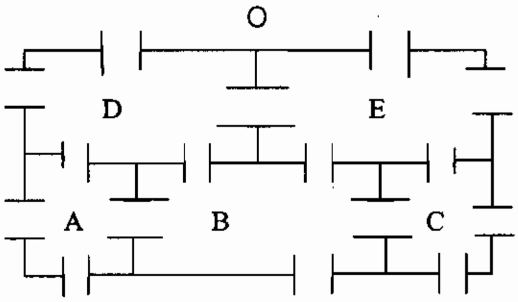
จากกราฟจะเห็นได้ว่าจุดยอดที่มีดีกรีคี่ คือ v_1 กับ v_3(ดีกรีเท่ากับสาม) ส่วนจุดที่มีดีกรีคู่คือจุด v_4, v_5, v_6 และ v_7 มีดีกรีสี่ และจุด v_2 มีดีกรีสอง

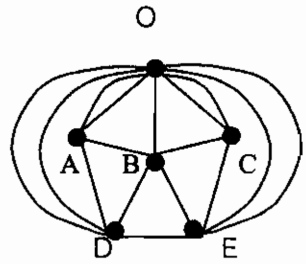
เพื่อให้จุด v_1 และ v_3 มีดีกรีคู่ จึงสร้างวิถีสั้นที่สุดจาก v_1 ถึง v_3 ได้กราฟดังนี้



กราฟแบบออยเลอร์และวิถีแบบออยเลอร์ถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาการส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์ที่ต้องการส่งจดหมายให้ครบทุกแห่งแต่ใช้ระยะทางน้อยที่สุด ปัญหาเรื่องการหาทางออกจากเขาวงกต ซึ่งได้รับความสนใจมากในช่วงปลายคริสตศตวรรษที่ 19 ปัญหาเกี่ยวกับปริศนาเชิงให้ความบันเทิง หรือพักผ่อนหย่อนใจ

ตัวอย่างที่ 8



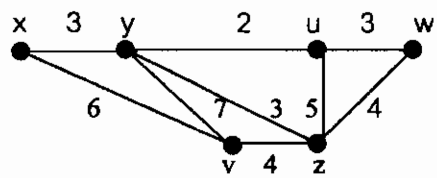


(ก) (ข)

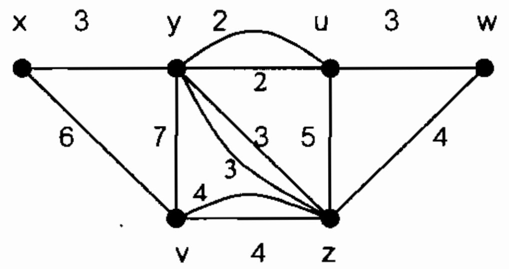
จากแผนผังแสดงสถานที่ภายในบ้านและประตูที่ติดต่อถึงกันภายในบ้านและสถานที่ภายนอกบ้าน เมื่อเขียนเป็นกราฟโดยให้จุดยอด A, B, C, D และ E แทนสถานที่ภายในบ้านและจุดยอด O แทนสถานที่ภายนอกบ้าน และให้เส้นเชื่อมแทนประตูที่ติดต่อถึงกันและออกไปภายนอกบ้าน จะทำให้ใช้คุณสมบัติของกราฟแบบออยเลอร์ตอบปัญหาได้ว่า ถ้าเริ่มจากจุดใดจุดหนึ่งไม่ว่าภายในบ้านหรือภายนอกบ้าน จะสามารถเดินผ่านประตูบ้านทุกประตู โดยไม่ซ้ำกันได้หรือไม่ ซึ่งคำตอบจะเห็นได้โดยชัดเจนว่า ไม่สามารถจะเดินผ่านประตูบ้านทุกประตูได้ โดยไม่ซ้ำกัน เพราะกราฟไม่เป็นแบบออยเลอร์และไม่มีวิถีแบบออยเลอร์ เนื่องจากมีจุดคี่ถึง 4 จุด คือ จุด B, D, E และ O

ตัวอย่างที่ 9

กราฟระบุน้ำหนักคือกราฟซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นระบุน้ำหนักเป็นจำนวนจริงบวก ในตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นการนำกราฟน้ำหนักมาใช้กับปัญหาการส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์ซึ่งในที่นี้คือการหาแนวเดินแบบปิด ซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดต่ำสุด และใช้เส้นเชื่อมทุกเส้นอย่างน้อย 1 ครั้ง กราฟระบุน้ำหนักตามตัวอย่างมีจุดคี่ 2 จุด คือ u กับ v



จะเห็นได้ว่าวิถีจุดยอด u ถึง v ซึ่งมีน้ำหนักน้อยที่สุด คือ วิถี uyzv ซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดเท่ากับ 9 และถ้าใช้เส้นเชื่อมในวิถีนี้เส้นละ 2 ครั้ง จะทำให้ได้กราฟแบบออยเลอร์ (ดังรูป)



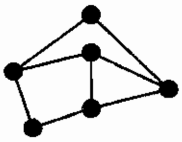
ดังนั้น คำตอบสำหรับปัญหาของบุรุษไปรษณีย์ในกราฟแบบออยเลอร์ คือ หาแนวเดินปิดซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดต่ำสุด แนวเดินในที่นี้คือ x y u w z u y z y v z v x ซึ่งมีน้ำหนักรวมทั้งหมดเท่ากับ 46

* * * * * * * *

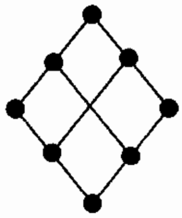
แบบฝึกหัด

1. จากกราฟต่อไปนี้ ให้หาว่ากราฟใดมีวิถีแบบออยเลอร์ หรือวงจรแบบออยเลอร์

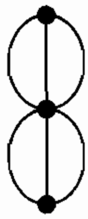
1.1



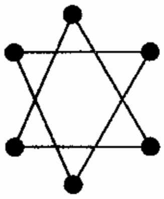
1.2



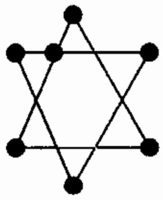
1.3



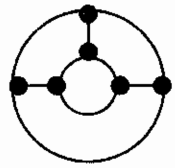
1.4



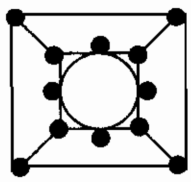
1.5



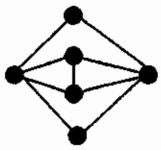
1.6



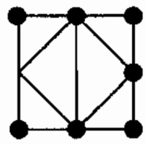
1.7



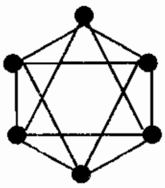
1.8



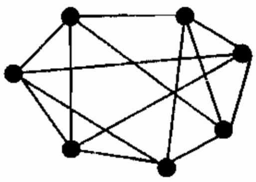
1.9



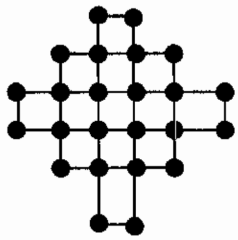
1.10



1.12



1.13

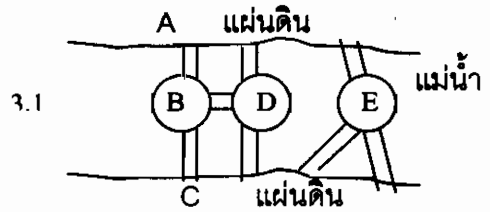


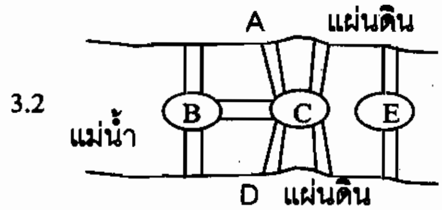
2. ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 10 ซึ่ง

2.1 เป็นกราฟแบบออยเลอร์ 2.2 เป็นกราฟซึ่งมีวิถีแบบออยเลอร์

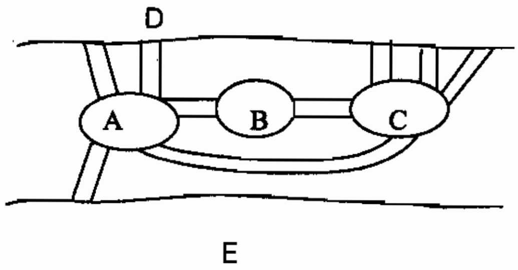
2.3 ไม่เป็นกราฟแบบออยเลอร์ และไม่มีวิถีแบบออยเลอร์

3. จากแผนผังที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้จำลองเป็นกราฟ และอธิบายให้เข้าใจว่ากราฟที่ได้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ หรือไม่

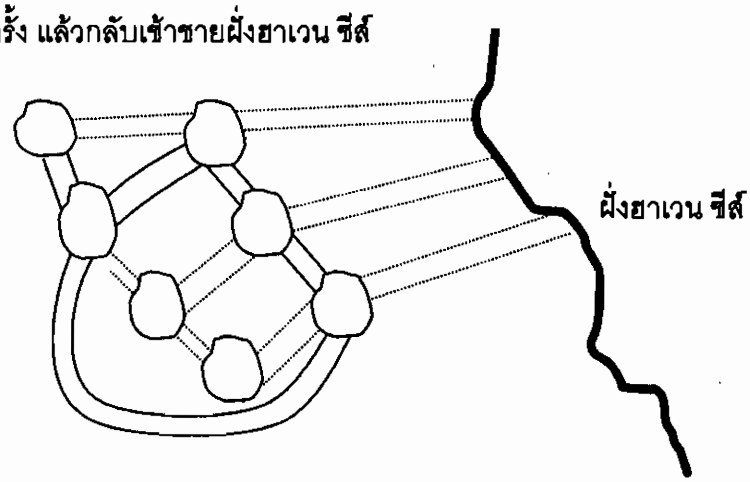




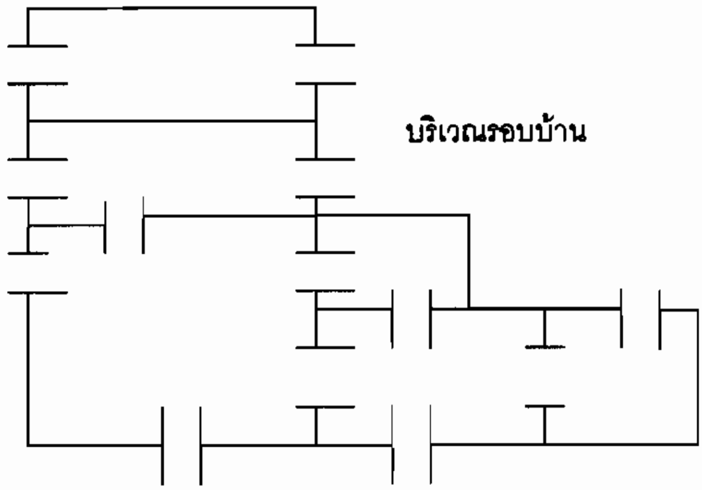
4. จากแผนผังเมืองเก่า ซึ่งประกอบด้วยเกาะ 3 เกาะ และสะพาน 8 แห่ง จงอธิบายให้เห็นว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินเที่ยวให้ทั่วเมืองเก่าแห่งนี้ โดยใช้ทุกสะพานเพียงแห่งละหนึ่งครั้ง



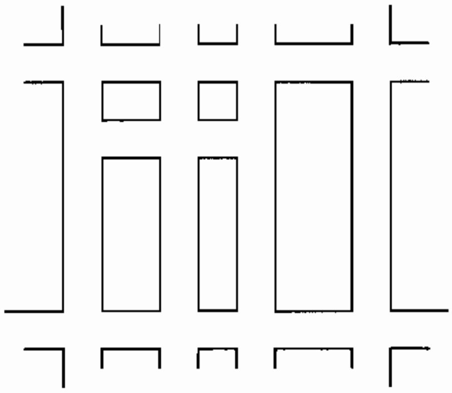
5. จากแผนผังแสดงหมู่เกาะพาราไดซ์ นอกชายฝั่งฮาเวน ซีส์ ซึ่งมีชื่อเสียงด้านการท่องเที่ยว เพราะเส้นทางเที่ยวทางเรือมีทิวทัศน์สวยงาม ให้อธิบายว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่บริษัทท่องเที่ยวสตาร์แวนเดอเรอ จะนำนักท่องเที่ยวชมวิวตามเส้นทางที่กำหนด (ด้วยเส้นไข่ปลา) ให้ผ่านตามเส้นทางแต่ละเส้นเพียง 1 ครั้ง แล้วกลับเข้าชายฝั่งฮาเวน ซีส์



6. จากแผนผังบ้านที่กำหนด ให้อธิบายว่าเจ้าของบ้าน จะสามารถเดินผ่านประตูบ้านทุกประตู เพียงแห่งละ 1 ครั้ง ได้หรือไม่อย่างไร



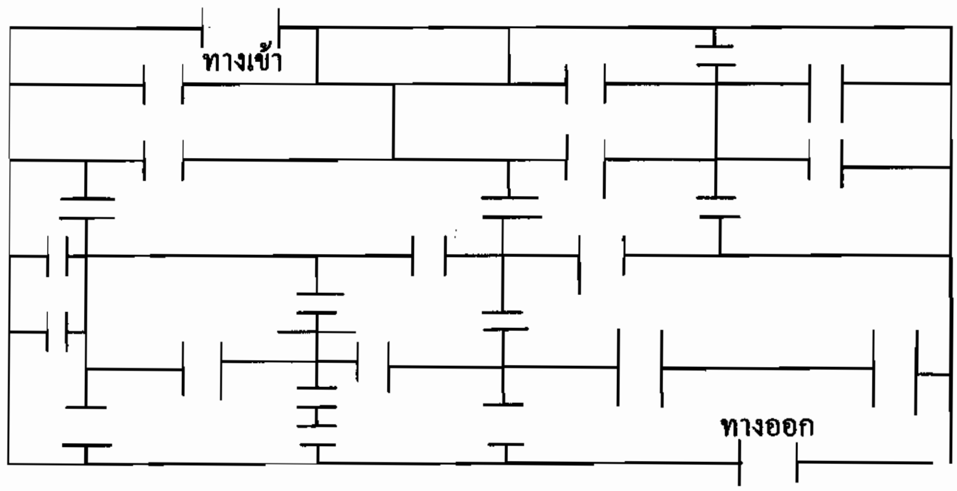
7. บุรุษไปรษณีย์ต้องเดินส่งจดหมายให้แก่บ้านสองฟากถนน (ดังรูป)



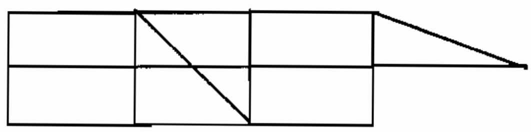
ถ้าบุรุษไปรษณีย์ไม่ต้องการเดินข้ามฟากส่งจดหมาย และต้องการเดินส่งจดหมายในแต่ละสะพานอย่างน้อยถนนละสองครั้ง ให้อธิบายว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะกลับถึงบ้านได้ทันทีเมื่อส่งจดหมายตอนเที่ยวกลับ

8. แผนผังข้างล่างนี้แสดง "บ้านสนธยา" แห่งหนึ่งซึ่งใครก็ตามเมื่อเดินผ่านประตูห้องหนึ่งไปแล้วประตูจะปิดโดยทันที และเปิดกลับไปอีกไม่ได้ สมมุติว่านักศึกษาเข้าบ้านหลังนี้ และเปิดประตูเข้า

ไปในห้องถัดไปได้ ให้นักศึกษาหาวิธีการออกจากบ้านหลังนี้ตามหลักของทฤษฎีกราฟ ถ้านักศึกษาหาทางออกไม่ได้ก็จะต้องอยู่ในบ้านหลังนี้ตลอดไป



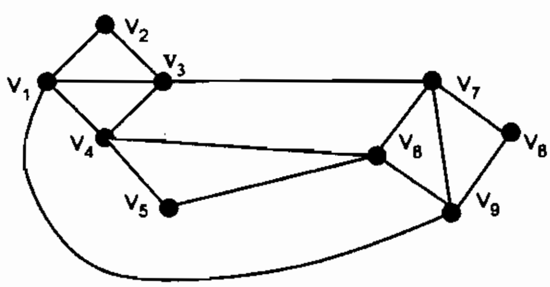
9. ให้อธิบายว่าคนขายไอศกรีมจะสามารถเร่ขายไอศกรีมบนถนนสายต่าง ๆ ทุกสาย (ตามแผนผังข้างล่างนี้) เพียงถนนละ 1 ครั้ง จะได้หรือไม่อย่างไร



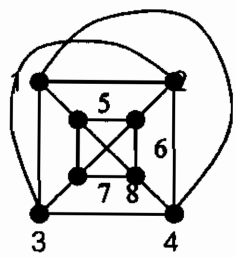
10. ให้พิสูจน์ว่ากราฟ G เป็นแบบออยเลอร์ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ G มีความเชื่อมโยง และชุดของเส้นเชื่อมในกราฟ G สามารถแบ่งออกเป็นวงเวียน

11. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ แล้วให้ใช้ขั้นตอนของฟลูรีหาวงจรแบบออยเลอร์

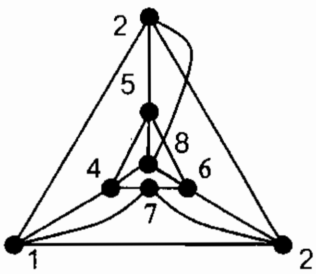
11.1



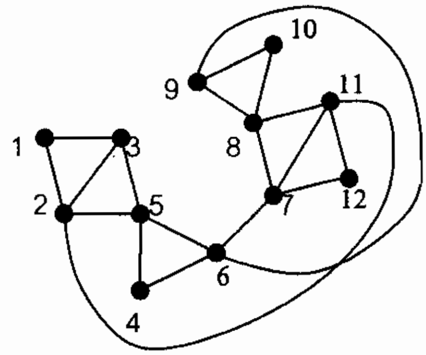
11.2



11.3

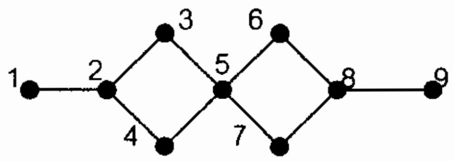


11.4

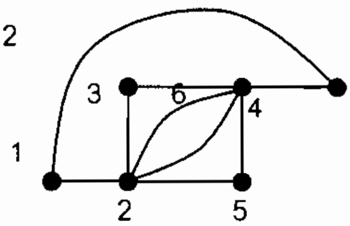


12. จากกราฟที่กำหนดให้ จงอธิบายว่าเป็นกราฟแบบออยเลอร์หรือไม่ และถ้ากราฟไม่เป็นแบบออยเลอร์ จะสามารถทำให้เป็นกราฟแบบออยเลอร์ด้วยการสร้างเส้นเชื่อมใดเพิ่มเติมได้หรือไม่

12.1



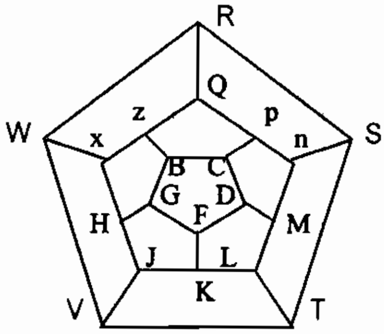
12.2



บทที่ 6
กราฟแบบแฮมิลตัน

6.1 นำเรื่อง

เซอร์ วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (1805 – 1865) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวไอริช ผู้มีชื่อเสียง ซึ่งมีพรสวรรค์ตั้งแต่ยังเล็ก มีผลงานที่เด่น 4 ทาง ด้านพีชคณิต พลศาสตร์ และทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต นอกจากนี้งานชิ้นสำคัญที่ศาสตราจารย์แฮมิลตันค้นพบ คือ ระบบพีชคณิต เกี่ยวกับกฎการสลับที่ของการคูณ พีชคณิตแบบควอเตอร์เนียน หรืออิโคเซียนแคลคูลัส ซึ่งศาสตราจารย์ แฮมิลตันได้เปลี่ยนปัญหาเป็นรูปของการเล่นเกม เรียกว่า อิโคเซียนเกม ซึ่งผู้เล่นจะต้องหาวงเวียนแบบแฮมิลตัน ที่กำหนดอักษรเริ่มแรกจำนวน 5 ตัวมาให้ เช่น ถ้าให้อักษร BCPNM ผู้เล่นจะหาวงเวียนแบบแฮมิลตันได้ 2 แบบคือ BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB กับ BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB (ดังรูป)



อิโคเซียนเกมวางตลาดในปี ค.ศ. 1859 ในรูปของการเดินทางรอบโลก ตามรูปทรง 12 หน้า 20 มุม แบบปกติ แต่ละมุมจะติดชื่อเมืองที่สำคัญจุดประสงค์ของการเล่นเกมคือจะต้องหาวงเวียนแบบแฮมิลตันที่ผ่านเมืองสำคัญแต่ละแห่งทุกเมืองเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมายังที่เดิมได้ ชื่อของแฮมิลตันได้มาจากเกมนี้นั่นเอง

6.2 กราฟและวิถีแบบแฮมิลตัน

<u>บทนิยาม 6.2.1</u>

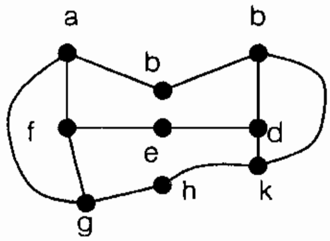
กราฟหรือพหุกราฟ G ซึ่งมีวงเวียนที่รวมทุกจุดใน G เรียกว่าเป็น<u>กราฟแบบแฮมิลตัน</u> ส่วนวิถีซึ่งรวมทุกจุดใน G เรียกว่า<u>วิถีแบบแฮมิลตัน</u>

<u>ข้อสังเกต</u>

การลบเส้นใด ๆ ออกจากวงเวียนแบบแฮมิลตันจะทำให้ได้วิถีแบบแฮมิลตัน ดังนั้น กราฟอาจมีวิถีแบบแฮมิลตัน แต่ไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

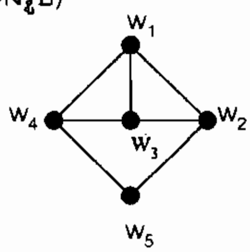
กำหนดกราฟ G (ดังรูป)



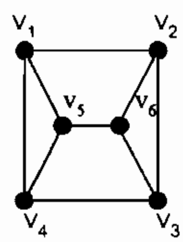
มีวิถีแบบแฮมิลตัน a b c d e f g h k แต่ไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

กราฟที่กำหนดให้ (ดังรูป)



G_1



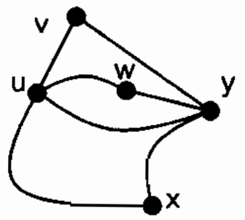
G_2

กราฟ G มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน คือ $C : w_1, w_2, w_5, w_4, w_3, w_1$

กราฟ G_2 มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน คือ $C_2 : v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_1$

ตัวอย่างที่ 3

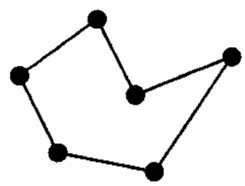
จงพิสูจน์ให้เห็นว่ากราฟ G ที่กำหนดให้ (ดังรูป) ไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน



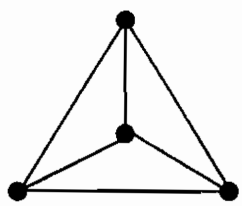
วิธีทำ

ถ้ากราฟเป็นแบบแฮมิลตัน กราฟจะต้องมีวงเวียนซึ่งผ่านจุดยอดทุกจุดในกราฟ ดังนั้น ถ้า C เป็นวงเวียน C จะต้องรวมจุดยอดทุกจุดใน G นั่นคือ จุดยอด v,w และ x ต้องอยู่ใน C แต่เนื่องจากทั้ง 3 จุด มีดีกรีเป็นคู่ แสดงว่าแต่ละจุดต้องมีเส้นเชื่อมถึงกันอย่างน้อยสองเส้น นั่นคือ C มีเส้นเชื่อม uv, uw, และ ux ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของวงเวียนที่ว่าจุดยอดใด ๆ ในวงเวียนมีเส้นเชื่อมได้เพียงสองเส้น แสดงว่ากราฟ G นี้ไม่มีวงเวียน C จึงไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

ในเรื่องของกราฟแบบออยเลอร์ที่ผ่านมามีทฤษฎีบทซึ่งพร้อมทั้งเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะหาว่ากราฟใดเป็นกราฟแบบออยเลอร์หรือไม่ แต่ในเรื่องกราฟแบบแฮมิลตันยังไม่มีทฤษฎีบทพร้อมเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในการหาว่ากราฟใดเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน การหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับกราฟแบบแฮมิลตัน เป็นเรื่องที่กำลังศึกษาค้นคว้ากันอย่างกว้างขวาง ปัจจุบันเท่าที่ทำได้ คือ หากราฟแบบต่าง ๆ ที่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน เช่น กราฟแบบวงเวียน C_n เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน กราฟแบบสมบูรณ์ K_n เป็นแบบแฮมิลตัน สำหรับ $n \geq 3$



C_6

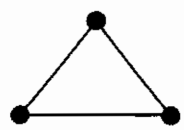


K_4

ในกราฟแบบแฮมิลตัน เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม กราฟจะยังเป็นแบบแฮมิลตัน เพราะยังคงใช้วงเวียนเดิมในตอนแรกได้ ในลักษณะนี้ กราฟที่มีเส้นเชื่อมมากมีแนวโน้มที่จะเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน มีทฤษฎีบทอยู่ 2 ทฤษฎี สำหรับเงื่อนไขเพียงพอในการหากราฟแฮมิลตัน ซึ่งถือว่ามีความสำคัญ คือ

ทฤษฎีบท 6.1
กราฟ G เรียกว่าเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน ถ้ากราฟ G อันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ มี $\deg v \geq \frac{p}{2}$ และ v เป็นจุดยอดใน G

พิสูจน์
ถ้ากราฟ G มีอันดับ 3 $(p = 3)$ และ $\deg v \geq 3/2$ สำหรับแต่ละจุด v ใน G แสดงว่า $\deg = 2$ และ G คือกราฟ K_3



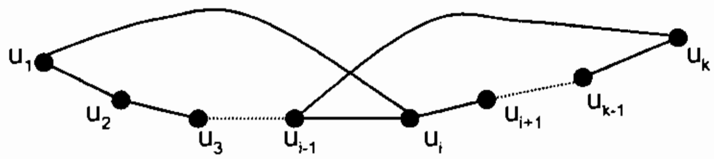
Gเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน (ตามทฤษฎี) ถ้า $p \geq 4$ ให้ G มีวิถี Q ซึ่งมีจำนวนจุดยอดมากที่สุด โดยที่ Q คือวิถี $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_k$ เนื่องจากไม่มีวิถีอื่นใดที่มีจุดยอดมากกว่าวิถี Q ดังนั้นจุดยอดทุกจุดที่ประชิดจุดยอด u_1 และ u_k จะต้องอยู่ในวิถี Q และเพราะว่าจุดยอด u_1 ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยที่สุด $\frac{p}{2}$ จุด แสดงว่าวิถี Q มีจุดยอดอย่างน้อยที่สุด $\frac{p}{2} + 1$ จุด ดังนั้นจะต้องมีจุดยอด u_i ที่ $2 \leq i \leq k$ ซึ่งจุดยอด u_i ประชิดกับจุดยอด u_1 และจุดยอด u_{i-1} ประชิดกับจุดยอด u_k เพราะว่ามีจุดยอด u_i อย่างน้อยจำนวน $\frac{p}{2}$ จุดที่ประชิดกับจุดยอด u_1 ดังนั้นต้องมีจุดยอด u_{i-1} อย่างน้อย จำนวน $\frac{p}{2}$ จุดที่ไม่ประชิดกับจุดยอด u_k

เพราะฉะนั้น

$$\deg u_k \leq (p - 1) - \frac{p}{2} < \frac{p}{2}$$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎี $(\deg u_k \geq \frac{p}{2})$

แสดงว่าจะต้องมีจุดยอด u_i ในวิถี Q และเส้นเชื่อม $u_1 u_i$ กับ $u_k u_{i-1}$ ต้องอยู่ในกราฟ G ทั้ง 2 เส้น



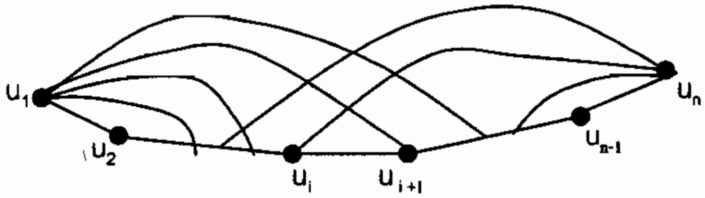
ดังนั้น จะต้องมีวงเวียน C ในรูปของ u_1 ,u_i ,u_{i+1} ,...., u_k ,u_{i-1} , u_{i-2},...., u_1 ที่รวมจุดยอดทุกจุดในวิถี Qซึ่ง ถ้า C รวมทุกจุดใน G แสดงว่า C เป็นวงเวียนแบบแฮมิลตันและ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน สมมุติว่า ถ้ามีจุดยอดบางจุดของ G ที่ไม่อยู่ใน C เช่น จุดยอด w เพราะว่าวงเวียน C รวมจุดยอดอย่างน้อยที่สุด $1 + \frac{p}{2}$ จุด ดังนั้นต้องมีจุดยอดใน G จำนวนที่น้อยกว่า $\frac{p}{2}$ จุด ซึ่งไม่อยู่ในวงเวียน C แต่เพราะว่า $\deg w \geq \frac{p}{2}$ ดังนั้นจุดยอด w ต้องประชิดกับจุดยอด u_j บางจุดใน C ซึ่งเส้นเชื่อม wu_j เมื่อรวมกับวงเวียน C จะเกิดวิถีอื่นที่มีจุดยอดรวมแล้วมากกว่าจุดยอดในวิถี Q ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะกำหนดไว้แล้วว่าวิถี Q มีจำนวนจุดยอดมากที่สุด ดังนั้น วงเวียน C ต้องรวมจุดยอดทุกจุดใน G และกราฟ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

<u>ทฤษฎีบท 6.2</u>

กราฟ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน ถ้ากราฟ G อันดับ n ซึ่ง $n \geq 3$ มี $\deg u + \deg v \geq n$ และ u กับ v เป็นจุดยอดใด ๆ ที่ไม่เป็นจุดประชิด

<u>พิสูจน์</u> (ใช้ความขัดแย้ง)

ถ้ากราฟ G ไม่เป็นแบบแฮมิลตัน ซึ่ง $\deg u + \deg v \geq n$ สำหรับจุดยอด u และ v ที่ไม่เป็นจุดประชิดกัน ในกรณีนี้สมมุติว่าเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อมบางเส้นใน G ทำให้กราฟ G เป็นแบบแฮมิลตัน ซึ่งหมายถึงว่าจะต้องมีวิถี u_1 ,u_2 ,...., u_n ซึ่งรวมจุดยอดทุกจุดแต่จุดยอด u_1 กับ u_n ไม่เป็นจุดประชิด (ดังรูป)



จากกราฟจะเห็นได้ว่าถ้าเพิ่มเส้นเชื่อม u_1 ,u_n จะได้กราฟแบบแฮมิลตัน เนื่องจาก u_1 กับ u_n ไม่เป็นจุดประชิดกัน ดังนั้น

$$\deg u_1 + \deg u_n \geq n$$

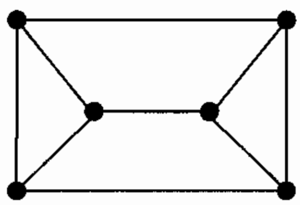
หรือ $\deg u_n \geq n - \deg u_1$

แสดงให้เห็นว่า ถ้า $\deg u_1 = r$ แล้วจะมีจุดยอดที่ไม่ประชิดกับ u_n ซึ่งรวมทั้ง u_n ด้วยเป็นจำนวนอย่างมากที่สุด r จุด

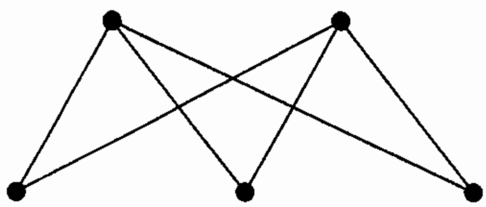
พิจารณาจุดยอดต่าง ๆ ที่ประชิดกับจุดยอด u_1 และให้ V เป็นเซตของจุดยอดต่าง ๆ ที่อยู่ถัดจากจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอด u_1 ขึ้นไปในวิถี เช่น ถ้า u_1 เชื่อมโยงกับ u_k แล้ว u_{k-1} เป็นจุดที่อยู่ใน V ดังนั้นเซต V มีจุดยอด r จุด แต่ไม่รวมจุดยอด u_n

การที่มีจุดยอดที่ไม่ประชิดกับ u_n อย่างมากที่สุดจำนวน r จุด และจุดยอดในเซต V มีทั้งหมด r จุด แต่ไม่รวมจุดยอด u_n ชี้ให้เห็นว่าเซตของจุดยอด V จะต้องมีจุด u_i ที่ประชิดกับจุด u_n และจะต้องมีเส้นเชื่อม u_i กับ u_{i+1} และเส้นเชื่อม u_i กับ u_n (ดังรูป) แสดงว่ามีวงเวียนแบบแฮมิลตันใน G คือ u_1 ,u_2 ,....., u_{i-1} , u_i ,u_n ,u_{n-1} ,....., $u_{i+1}u_1$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานในตอนแรกว่ากราฟ G ไม่ใช่กราฟแบบแฮมิลตัน ดังนั้นสรุปได้ว่าทฤษฎีเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4



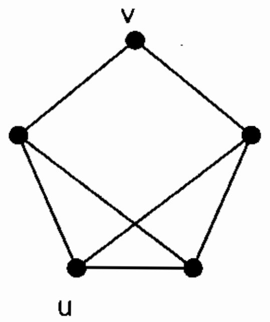
(ก)



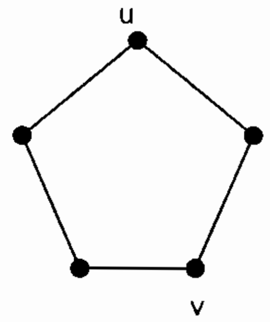
(ข)

กราฟในรูป (ก) เป็นกราฟแบบแฮมิลตันตามทฤษฎี 6.1 เพราะว่าแต่ละจุดมีดีกรี 3 และกราฟมีอันดับ 6 ดังนั้น $\deg v_i \geq p/2$ $(3 = \frac{6}{2})$ กราฟในรูป (ข) ไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน เพราะมีจุดยอดซึ่งมีดีกรี 2 ดังนั้น $\deg v_i \ngeq \frac{p}{2}$ $(2 \ngeq \frac{5}{2})$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



(ก)



(ข)

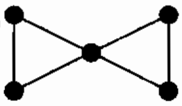
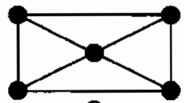
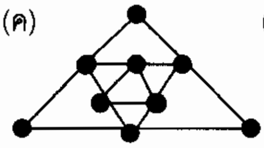
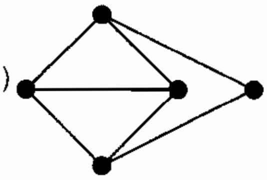
กราฟในรูป (ก) มีอันดับ 5 ส่วนดีกรีของจุด v = 2 ดังนั้นใช้ทฤษฎีบท 7.1 ไม่ได้ แต่ใช้ทฤษฎีบท 7.2 ได้ เนื่องจาก deg u + deg v $\geq$ 5 สำหรับจุดยอด u และ v ที่ไม่ประชิดกัน ดังนั้นกราฟในรูป (ก) เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

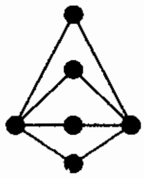
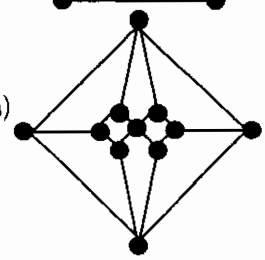
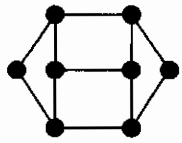
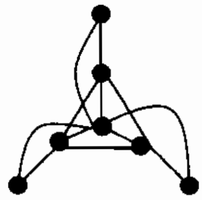
อย่างไรก็ตามกราฟในรูป (ข) มีอันดับ 5 ส่วนดีกรีของจุด = 2 และใช้ทฤษฎีบททั้ง 6.1 และ 6.2 ไม่ได้ เพราะไม่ตรงตามเงื่อนไขที่เพียงพอแต่กราฟนี้มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน และเป็นกราฟแบบแฮมิลตันชี้ให้เห็นว่าเป็นความสำคัญในการศึกษาเรื่องทฤษฎีกราฟในปัจจุบันที่ต้องหาทฤษฎีบทที่เพียงพอและจำเป็นในการหากราฟแบบแฮมิลตัน

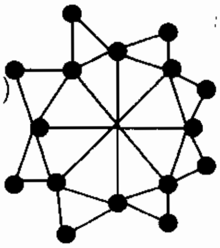
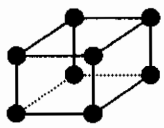
¤ ¤ ¤ ¤ ¤ ¤ ¤ ¤

แบบฝึกหัด

1. ให้อธิบายว่ากราฟต่อไปนี้เป็นกราฟแบบแฮมิลตันหรือไม่

(ก) 
(ข) 
(ค) 
(ง) 

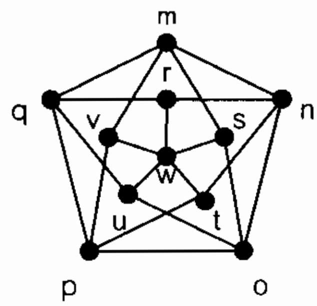
(จ) 
(ฉ) 
(ช) 
(ซ) 

(ฌ) 
(ญ) 

2. ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 10 ซึ่งเป็นกราฟแบบแฮมิลตัน
3. ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 10 ซึ่งไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน
4. เป็นความจริงหรือไม่ที่กล่าวว่ากราฟแบบออยเลอร์เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน ให้อธิบายและยกตัวอย่างประกอบ
5. เป็นความจริงหรือไม่ที่กล่าวว่ากราฟแบบแฮมิลตันเป็นกราฟแบบออยเลอร์ให้อธิบายและยกตัวอย่างประกอบ
6. ในงานเลี้ยงสังสรรค์วันสำเร็จการศึกษาของบัณฑิตที่จบจากมหาวิทยาลัยรามคำแหงปรากฏว่ามีผู้มาร่วมงานมากมาย มีทั้งชาย (ช) และ หญิง (ญ) จงแสดงให้เห็นว่าเมื่อแทนสถานะการณ์ในงานเลี้ยงด้วยกราฟ G ซึ่งจุดยอดแทน ชาย กับ หญิง และมีเส้นเชื่อมระหว่างชายกับหญิง ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อบัณฑิตคู่นั้นรู้จักกันมาก่อน จงพิสูจน์ว่ากราฟ G จะเป็นแบบแฮมิลตันก็ต่อเมื่อจำนวนบัณฑิตชายหญิงเท่ากัน

   (ข้อแนะนำ G เป็นกราฟแบบแฮมิลตันก็ต่อเมื่อ G มีวงเวียนแบบแฮมิลตัน)

7. ถ้ากำหนดกราฟ G ให้ดังนี้

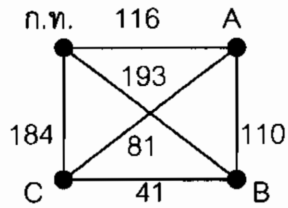


(ก) ให้หาวงเวียนแบบแฮมิลตันซึ่งรวมเส้นเชื่อม mn และ nr

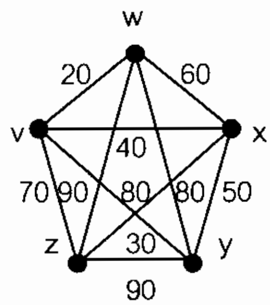
(ข) ให้พิสูจน์ว่าไม่มีวงเวียนแบบแฮมิลตันซึ่งมีเส้นเชื่อม mn , nr และ rw รวมอยู่ด้วย

8. ให้พิสูจน์ว่ากราฟแบ่งกั้นใด ๆ ที่มีจุดยอดเป็นจำนวนคี่จะไม่เป็นกราฟแบบแฮมิลตัน

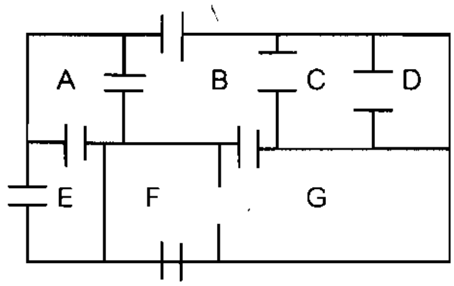
9. ถ้าเจ้าหน้าที่ฝ่ายการตลาดผู้หนึ่งต้องการเดินทางไปยังสถานที่ต่าง ๆ เพียงแห่งละ 1 ครั้ง แล้วกลับที่เดิม โดยให้มีระยะทางของการเดินทางสั้นที่สุด ให้หาว่าถ้าเจ้าหน้าที่ผู้นี้อยู่ที่กรุงเทพและต้องการเดินทางไปยังสถานที่ต่าง ๆ 4 แห่ง (ดังรูป) เส้นทางที่เลือกเดินทางควรจะเป็นเส้นใด



10. เจ้าหนี้รายหนึ่งต้องการไปทวงเงินบรรดาลูกหนี้ซึ่งอยู่ตามสถานที่ต่าง ๆ กัน แล้วกลับบ้านให้หาว่าถ้าบ้านเจ้าหนี้อยู่ที่จุด V เส้นทางซึ่งสั้นที่สุดไปยังบ้านลูกหนี้เพียงแห่งละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่ V คือเส้นทางใด



11. แผนผังบ้านชั้นเดียวซึ่งแสดงทางเดินระหว่างห้องพร้อมประตูเข้าออกมีดังนี้



เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเริ่มต้นจากภายนอกบ้าน เดินเข้าไปภายในบ้านเดินผ่านห้องทุกห้องเพียง 1 ครั้ง แล้วกลับออกภายนอกบ้าน ถ้ามีเส้นทางที่เป็นไปได้ให้อธิบายว่าใช้เส้นทางใด

บทที่ 7
ความเชื่อมโยง

7.1 <u>นำเรื่อง</u>

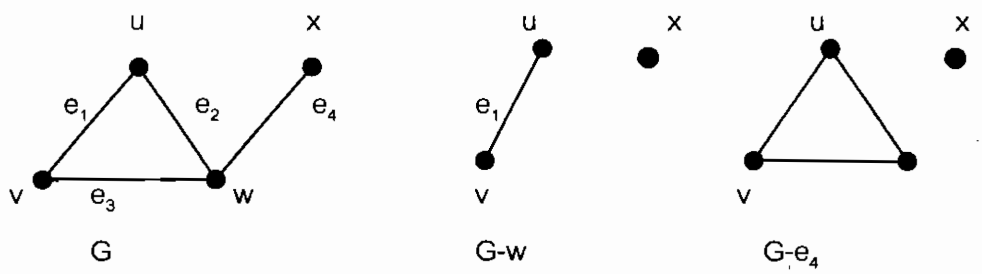
ในบทนี้จะเป็นเรื่องเกี่ยวกับความเชื่อมโยงและบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องซึ่งในขั้นแรกมีแนวความคิดสำคัญที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้ คือ

ถ้ากำหนดให้ e เป็นเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งในกราฟ G ใด ๆ กราฟ G – e คือกราฟย่อยของ G ซึ่งมีจำนวนจุดยอดเท่ากับจุดยอดในกราฟ G และมีจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G ทั้งหมดยกเว้นเส้นเชื่อม e

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดยอดอย่างน้อยสองจุดขึ้นไป และมีจุด v เป็นจุดยอดจุดหนึ่งในกราฟ กราฟ G – v คือกราฟย่อยของ G ซึ่งรวมจุดยอดทุกจุดใน G ยกเว้นจุดยอด v และเส้นเชื่อมที่โยงกับจุด v

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นแนวความคิดการลบจุดยอด หรือเส้นเชื่อมออกจากกราฟ

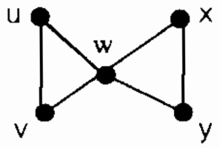


7.2 <u>จุดตัดและสะพาน</u>

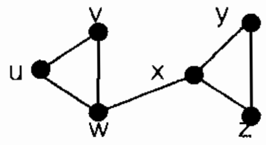
<u>บทนิยาม 7.2.1</u> (จุดตัด)

จุดยอด v ในกราฟเชื่อมโยง G ใด ๆ เรียกว่าจุดตัด ถ้ากราฟ G – v ขาดความเชื่อมโยง

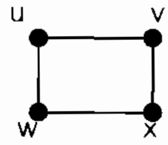
ตัวอย่างที่ 2



G_1



G_2



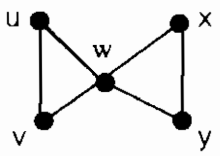
G_3

ตามบทนิยามจะเห็นได้ว่า กราฟ G_1 มีจุดยอด w เป็นจุดตัดเพียงจุดเดียวส่วนกราฟ G_2 มีจุดยอด 2 จุด ที่เป็นจุดตัด คือ จุด w กับจุด x แต่ทั้ง G_1 และ G_2 มี $r(G) = 1$ สำหรับกราฟ G_3 มี $r(G) = 2$

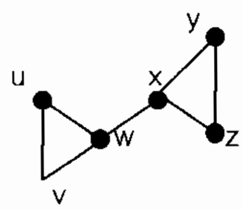
บทนิยาม 7.2.2 (สะพาน)

เส้นเชื่อม e ในกราฟเชื่อมโยง G ใด ๆ เรียกว่า สะพาน ถ้ากราฟ G – e ขาดความเชื่อมโยง

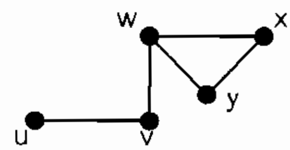
ตัวอย่างที่ 3



G_1



G_2



G_3

ตามบทนิยามจะเห็นได้ว่ากราฟ G_1 ไม่มีสะพาน กราฟ G_2 มีเส้นเชื่อม wx เป็นสะพาน 1 สะพาน และ กราฟ G_3 มีเส้นเชื่อม uv กับ vw เป็นสะพาน 2 สะพาน

ทฤษฎีบท 7.1

จุดยอด v ในกราฟเชื่อมโยง G เรียกว่า จุดตัด ใน G ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ จุดยอด v อยู่บนวิถี จากจุดยอด u ถึงจุดยอด w สำหรับ u และ w ใด ๆ ใน G

<u>พิสูจน์</u>

⇒ ถ้า v เป็นจุดตัดในกราฟ G (นั่นคือ G – v ขาดความเชื่อมโยง) ให้ u และ w เป็นจุดยอดในส่วนประกอบต่างกันของกราฟ G – v แสดงว่ากราฟ G – v จะไม่มีวิถีจาก u ถึง w แต่เนื่องจากกราฟ G มีความเชื่อมโยง ดังนั้นจะต้องมีวิถีจาก u ถึง w ใน G นั่นคือทุกวิถีจาก u ถึง w ใน G ต้องรวม v ด้วย

⇐ ในทางกลับกัน ถ้าทุกวิถีจาก u ถึง w ใน G รวมจุด v แสดงว่าจะต้องไม่มีวิถีจาก u ถึง w ในกราฟ G – v นั่นคือกราฟ G – v ขาดความเชื่อมโยง ดังนั้น v เป็นจุดตัดใน G

<u>ทฤษฎี</u> 7.2

ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยง เส้นเชื่อม e ในกราฟ G เรียกว่า <u>สะพาน</u> ของ G ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อเส้นเชื่อม e ไม่อยู่ในวงเวียนของกราฟ G

<u>พิสูจน์</u>

⇒ ให้เส้นเชื่อม e = uv เป็นสะพาน และ e ไม่อยู่ในวงเวียน C ของกราฟ G ให้วงเวียน C คือ u, v, w, …… ,x, u (w ตามหลัง v และ x อยู่หน้า u) กราฟ G – e มีวิถีจาก u ถึง v คือ u, x, ………, w, v แสดงว่าออกจากจุดยอด u ไปยัง v ได้ (เพื่อแสดงว่ากราฟ G – e มีความเชื่อมโยง)

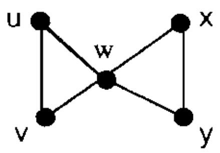
ถ้าจุดยอด u_1 กับ v_1 อยู่ในกราฟ G – e จะต้องมีวิถีจาก u_1 ถึง v_1 เนื่องจากกราฟ G มีความเชื่อมโยง ดังนั้น จะต้องมีวิถี P ของ u_1 ถึง v_1 ใน G ถ้า<u>เส้นเชื่อม e ไม่อยู่ใน P</u> แสดงว่าวิถี P ต้องอยู่ในกราฟ G – e ด้วย และกราฟ G – e มีวิถีจาก u_1 ถึง v_1 <u>ถ้าเส้นเชื่อม e อยู่ใน P</u> แสดงว่าวิถี P คือ u_1,…., u,v,….., v_1 หรือวิถี P คือ u_1,…., v, u,….., v_1 เพราะว่า u เชื่อมโยงถึง v ในกราฟ G – e ดังนั้นจากความเหมือนกันของความสัมพันธ์ในการเชื่อมโยงจุดใน G – e แสดงว่า u_1 เชื่อมโยงถึง v_1 ดังนั้นถ้าเส้นเชื่อม e อยู่ในวงเวียนกราฟ G – e มีความเชื่อมโยงแสดงว่า e ไม่เป็นสะพาน (ได้ข้อขัดแย้ง)

⇐ ถ้าเส้นเชื่อม e = uv ไม่เป็นสะพานและไม่อยู่ในวงเวียนของกราฟ G ดังนั้นกราฟ G – e มีความเชื่อมโยง แสดงว่ามีวิถีจากจุดยอด u ถึงจุดยอด v ในกราฟ G – e แต่วิถีจากจุดยอด u ถึงจุดยอด v รวมกับเส้นเชื่อม e จะทำให้ได้วงเวียนใน G ซึ่งรวมเส้นเชื่อม e (ได้ข้อขัดแย้ง) ดังนั้นสรุปได้ว่าเส้นเชื่อม e เป็นสะพาน

<u>บทนิยาม 7.2.3</u> (จำนวนจุดตัด)

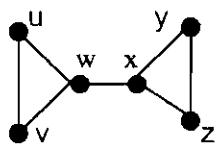
จุดยอดจำนวน<u>น้อยที่สุด</u>ซึ่งทำให้กราฟเชื่อมโยง G ขาดความเชื่อมโยง เรียกว่า จำนวนจุดตัด และใช้สัญลักษณ์ $\propto$ (G) ถ้า $\propto$ (G) $\geq$ k เรียกว่ากราฟ Gมีจำนวนจุดตัด k จุด (ซึ่งจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง)

<u>ตัวอย่างที่ 4</u>



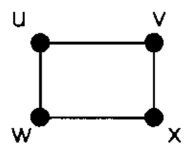
$\alpha(G)_{=1}$

จุดตัด w



$\alpha(G)_{=1}$

จุดตัด w กับ x



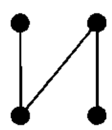
$\alpha(G)_{=2}$

จุดตัด u กับ w **หรือ** v กับ x

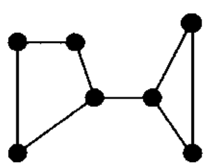
<u>บทนิยาม 7.2.4</u> (จำนวนเส้นตัด)

เส้นเชื่อมจำนวน<u>น้อยที่สุด</u>ซึ่งทำให้กราฟเชื่อมโยง G ขาดความเชื่อมโยง เรียกว่า จำนวนเส้นตัด และใช้สัญลักษณ์ β (G) ถ้า β(G) = k เรียกว่า กราฟ G มีจำนวนเส้นตัด k เส้น (ซึ่งจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง)

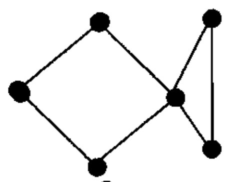
<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



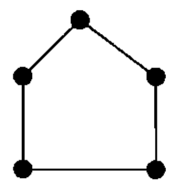
$\beta(G) = 1$



$\beta(G) = 1$



$\beta(G) = 2$

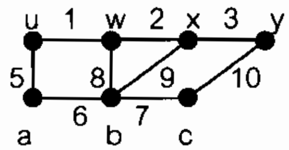


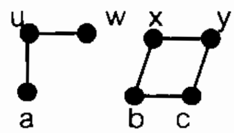
$\beta(G) = 2$

<u>ข้อสังเกต</u>

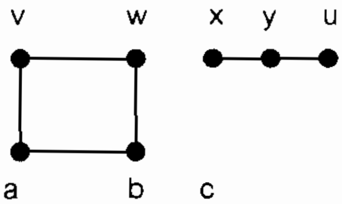
ในการเลือกเส้นเชื่อมที่ลบออกเพื่อให้กราฟขาดความเชื่อมโยง โดยทั่วไปจะเลือกเส้นเชื่อมจำนวนน้อยที่สุด

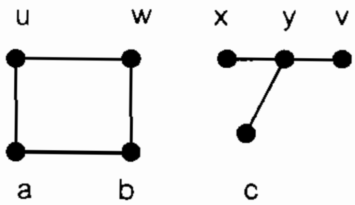
ตัวอย่างที่ 6





กราฟนี้ขาดความเชื่อมโยงเมื่อลบเส้นเชื่อมจำนวน 3 เส้น คือ wx, wb และ ab และกราฟจะไม่ขาดความเชื่อมโยงถ้าลบเพียง 2 เส้น นั่นคือจะต้องลบทั้ง 3 เส้น กราฟจึงจะขาดความเชื่อมโยง ในทำนองเดียวกันถ้าลบเส้นเชื่อม wx , bc, bx และ ye





กราฟจะขาดความเชื่อมโยงเช่นกัน แต่การลบในที่นี้เส้นเชื่อม yc เป็นเส้นที่เกินความจำเป็นในการลบออก เพราะถ้าไม่ลบเส้น yc กราฟก็ขาดความเชื่อมโยงแล้ว (นั่นคือลบเฉพาะเส้นเชื่อม wx, bc และ bx)

บทนิยาม 7.2.5 (เซตของเส้นตัด)

เซตของเส้นตัดในกราฟเชื่อมโยง G คือเซตของเส้นเชื่อม S ที่มีสมบัติว่าเมื่อลบเส้นเชื่อมทั้งหมดใน S กราฟ G ขาดความเชื่อมโยง <u>และ</u> ถ้าลบเส้นเชื่อมเพียงบางเส้น กราฟ G ไม่ขาดความเชื่อมโยง

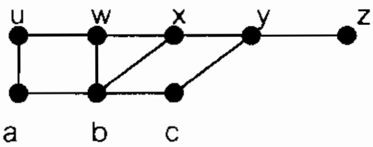
ตัวอย่างที่ 7

กราฟเชื่อมโยงในตัวอย่างที่ 6 มีเซตของเส้นตัดคือ {ab, wb, wx} หรือ {bc, xy} แสดงให้เห็นว่าเซตของเส้นตัดไม่จำเป็นต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน

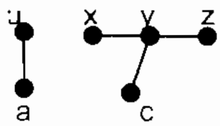
<u>บทนิยาม 7.2.6</u> (เซตของจุดตัด)

เซตของจุดตัดในกราฟเชื่อมโยง G คือ เซต ของจุดยอด S ที่มีสมบัติว่าเมื่อลบจุดยอดทั้งหลายใน S กราฟ G ขาดความเชื่อมโยง <u>และ</u> ถ้าลบจุดยอดเพียงบางจุดกราฟ G ไม่ขาดความเชื่อมโยง

<u>ตัวอย่างที่ 8</u>

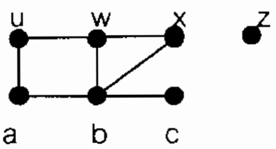


G



G-{b,w}

จะเห็นได้ว่าเมื่อลบจุดยอด b และ w ในกราฟ จะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง ดังนั้น {b, w} เป็นเซตของจุดตัด และเซตของจุดตัดอาจมีหลายเซต ซึ่งแต่ละเซตอาจมีจำนวนจุดยอดในเซตแตกต่างกัน เช่น กราฟตามตัวอย่างนี้มี {y} เป็นเซตของจุดตัดด้วย



G-{y}

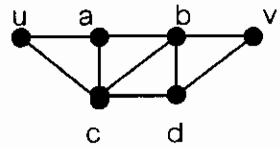
7.3 <u>วิถีและการตัดวิถี</u>

<u>บทนิยาม 7.3.1</u> (วิถี)

ให้ u และ v เป็นจุดยอดในกราฟเชื่อมโยง G วิถีจาก u ถึง v ตั้งแต่ 2 วิถีขึ้นไป เรียกว่าวิถี uv ถ้าไม่มีเส้นเชื่อมหรือจุดยอดใด ๆ ร่วมกันในวิถี uv (ยกเว้น u กับ v)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>

จากกราฟ



วิถี uabv กับ ucdv เป็นวิถีจาก u – v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมหรือจุดยอดใด ๆ ซ้ำกัน

วิถี uabv กับ ucbv เป็นวิถีจาก u – v ที่มีเส้นเชื่อม bv และจุดยอด b ซ้ำกัน

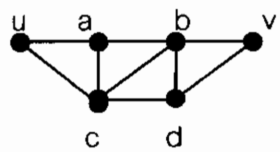
วิถี uabv กับ ucbdt เป็นวิถีจาก u – v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน แต่มีจุดยอดร่วมกัน คือ b

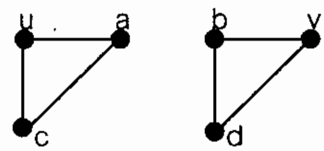
<u>บทนิยาม</u> <u>7.3.2</u> (การตัดวิถี)

วิถีจากจุดยอด u ถึง v ในกราฟเชื่อมโยง G เรียกว่า ถูกตัดออกจากกัน ถ้าลบจุดยอดบางจุดหรือเส้นเชื่อมบางเส้นแล้วทำให้จุดยอด u กับ v ถูกแบ่งแยกจากกัน

<u>ตัวอย่างที่ 10</u>

จากกราฟ

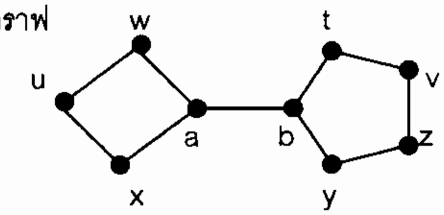




จะเห็นได้ว่าถ้าลบเส้นเชื่อม ab, bc, และ cd ตัดวิถีจาก u ถึง v ให้ขาดจากกัน ในทำนองเดียวกันถ้าลบเส้นเชื่อม ua, ab, bc, cd และ dv จะทำให้ไม่มีวิถีจาก u ถึง v และถ้าลบจุดยอด b กับ c หรือลบจุดยอด a, c และ d จะทำให้ไม่มีวิถีจาก u ถึง v

<u>ตัวอย่างที่ 11</u>

จากกราฟ



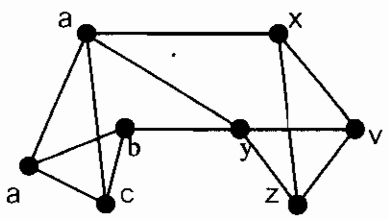
จะเห็นได้ว่าเมื่อลบเส้นเชื่อม a b เพียงเส้นเดียวจะไม่มีวิถีจาก u ถึง v และถ้ามีวิถีจาก u ถึง v สองวิถีขึ้นไปทุกวิถีต้องรวมเส้นเชื่อม a b

ตัวอย่างที่ 12

จากกราฟ

จะเห็นได้ว่าเมื่อลบเส้นเชื่อม 2 เส้น คือ bx กับ cy จะทำให้ไม่มีวิถีจาก u ถึง v หรือแยก u จาก v และจะมีวิถีจาก u ถึง v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันได้เพียง 2 วิถี เพราะทุกวิถี uv ต้องรวมเส้นเชื่อม bx หรือ cy

ตัวอย่างที่ 13



จากกราฟจะเห็นได้ว่าเมื่อลบเส้นเชื่อม 3 เส้น คือ ax, ay และ by จะตัดวิถีจาก u ถึง v และกราฟนี้มีวิถีจาก u ถึง v ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันได้อย่างมากที่สุดเพียง 3 วิถี เพราะทุกวิถีต้องรวมเส้นเชื่อม ax, ay หรือ by เส้นใดเส้นหนึ่ง

จากตัวอย่างต่าง ๆ แสดงให้เห็นว่าเมื่อลบเส้นเชื่อมทำให้วิถี จาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าในกรณีทั่ว ๆ ไป ทุกวิถีจาก u ถึง v จะต้องมีเส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด จำนวน 1 เส้น ซึ่งถ้าลบออกแล้วจะทำให้หาวิถีจาก u ถึง v ไม่ได้ หรือวิถีจาก u ถึง v ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะมีจำนวนไม่เกินจำนวนของเส้นเชื่อมนั่นคือ สำหรับเซตของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถีจาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง

<u>จำนวนสูงสุดของวิถี uv</u> ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ จำนวนของเส้นเชื่อมในเซตเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถีจาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง

สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้ คือ

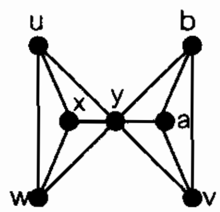
<u>ทฤษฎีบท</u> <u>7.3</u>

ถ้า u และ v เป็นจุดยอดในกราฟเชื่อมโยง G <u>จำนวนสูงสุดของวิถี</u> uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันที่ทำให้วิถี uv ขาดจากกัน จะเท่ากับ จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

ตามทฤษฎีนี้กล่าวได้ว่า ถ้าหาวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันได้ n วิถี และหาเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยงได้ n เส้น ก็แสดงว่า n คือ จำนวนสูงสุดของวิถี uv ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน และ n คือ จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยงเส้นเชื่อมเหล่านี้ทำให้ได้เซตของเส้นตัด ดังนั้น เมื่อต้องการหาเส้นเชื่อมเหล่านี้ก็ให้หาที่เซตเส้นตัดซึ่งแบ่งกราฟ G เป็นสองส่วน ส่วนหนึ่ง มีจุดยอด u และอีกส่วนหนึ่งมีจุดยอด v

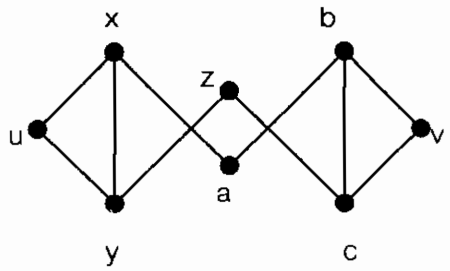
นอกจากความเชื่อมโยงด้วยเส้นเชื่อมยังมีความเชื่อมโยงด้วยจุดยอดซึ่งมีลักษณะคล้ายกัน ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างและทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 14</u>



กราฟในตัวอย่างนี้มีความเชื่อมโยงด้วยจุดยอด 1 จุด คือ จุดยอด y ที่แยก u จาก v และมีเพียงจุดยอด y เพียงจุดเดียวที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง เพราะทุกวิถี uv ต้องรวมจุดยอด y

ตัวอย่างที่ 15



กราฟตามตัวอย่างนี้มีความเชื่อมโยงด้วยจุดยอด 2 จุด คือ a กับ z ที่แยก u จาก v และมีเพียงจุดยอด a กับ z เท่านั้นที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง เพราะทุกวิถี uv ต้องรวมจุดยอด a หรือ z

จากตัวอย่างชี้ให้เห็นว่าเมื่อลบจุดตัดทำให้วิถีจาก u ถึง v ขาดความเชื่อมโยง ดังนั้นในกรณีทั่ว ๆ ไป ทุกวิถีจาก u ถึง v ต้องมีจุดตัดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด นั่นคือ จำนวนสูงสุดของจุดตัดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยงมีไม่เกินจำนวนจุดยอดในเซต สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 7.4

ให้ u และ v เป็นจุดยอดซึ่งไม่เป็นจุดประชิดกันในกราฟเชื่อมโยง G จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันและทำให้วิถีขาดความเชื่อมโยงเท่ากับจำนวนต่ำสุดของจุดยอดที่ทำให้วิถีขาดความเชื่อมโยง

ตามทฤษฎีนี้จะเห็นได้ว่าถ้าหาวิถี uv จำนวน k วิถี ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน และหาจุดยอด k จุดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง จะได้ว่า k คือจำนวนสูงสุดของวิถี uv และเป็นจำนวนต่ำสุดของจุดยอดในเซตตัด ซึ่งตัดวิถี uv และจุดยอดจำนวน k จุดนี้คือเซตตัดของจุดยอด ในการหาจุดยอดเหล่านี้จะพิจารณาว่าจุดยอดใด เมื่อลบออกจากกราฟเชื่อมโยง G แล้วจะทำให้กราฟ G ถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน ซึ่งส่วนหนึ่งรวมจุด u และอีกส่วนหนึ่งรวมจุด v

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเชื่อมโยงในกราฟระบุทิศทาง ซึ่งนำมาเสนอไว้เพื่อให้เกิดความสมบูรณ์

ทฤษฎีบท 7.5

ถ้า u และ v เป็นจุดยอดซึ่งไม่ประชิดกันในกราฟเชื่อมโยงระบุทิศทาง D จำนวนสูงสุดของวิถี uv ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน เท่ากับจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

พิสูจน์

เพราะว่าจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะไม่เกินกว่าจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมซึ่งทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง (เพื่อแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองนี้มีค่าเท่ากัน เช่นเท่ากับ k) ให้ A เป็นเซตของวิถี uv จำนวน k วิถี ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน

ให้ Bเป็นเซตของจุดยอดในกราฟระบุทิศทาง D ซึ่งมีวิถีมาจากจุดยอด u โดยไม่เป็นวิถีที่ซ้ำกับวิถีใน A และให้ C เป็นเซตของจุดยอดที่เหลืออื่น ๆ ในกราฟ D

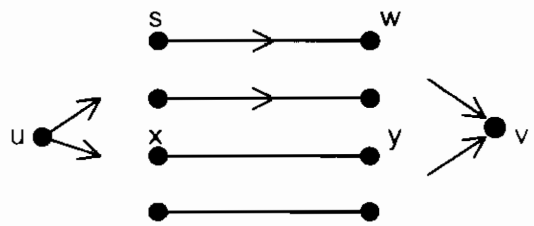
จะเห็นได้ว่า v ต้องเป็นจุดยอดที่อยู่ใน C เพราะว่าถ้า v อยู่ใน B จะต้องมีวิถี uv ที่แตกต่างออกไปอีกวิถีหนึ่ง ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะเซต A รวมวิถี uv ที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันไว้เป็นจำนวนสูงสุดแล้ว

ให้ S เป็นเซตของเส้นเชื่อมระบุทิศทางใน D จากจุดยอด w ในเซต B ไปยังจุดยอด x ใน C เส้นเชื่อมใน S นี้จะต้องรวมวิถีหนึ่งในเซต A เพราะมิฉะนั้นจุดยอด x (รวมทั้ง w) สามารถจะมีเส้นเชื่อมมาจากจุดยอด u โดยใช้วิถีที่แตกต่างจากวิถีทั้งหลายใน A และ จุดยอด x จะอยู่ในเซต B แทนที่จะอยู่ใน C

จากเหตุผลในแนวเดียวกันนี้ เส้นเชื่อมระบุทิศทางใด ๆ จากจุดยอดในเซต C ไปยังจุดยอด B จะต้องไม่รวมอยู่ในวิถีของเซต A

ดังนั้น จำนวนเส้นเชื่อมใน S จะเท่ากับจำนวนของวิถีในเซต A นั่นคือ เซต S มีเส้นเชื่อมจำนวน k เส้น ซึ่งเมื่อลบออกจะทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

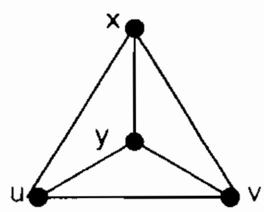
แสดงว่าจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นร่วมกันเท่ากับจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง (เท่ากับ k)



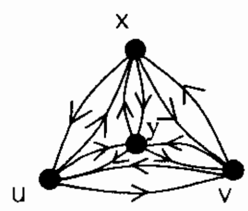
ข้อสังเกต

ในเรื่องของเส้นเชื่อมกับความเชื่อมโยง เมื่อนำมาใช้ในกราฟ สามารถใช้ทฤษฎีบท 7.5 ได้โดยพิจารณากราฟในรูปของกราฟระบุทิศทางด้วยการแทนเส้นเชื่อม 1 เส้น ใน H ด้วยเส้นเชื่อมระบุทิศทาง 2 เส้นใน D (H)

เช่น



กราฟ H



กราฟระบุทิศทาง D(H)

จะเห็นได้ว่า

ก. จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันใน H เท่ากับจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันใน D(H)

ข. จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมใน H ซึ่งแยกจุดยอด u จาก v เท่ากับ จำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมระบุทิศทางซึ่งแยกจุดยอด u จาก v ใน D(H)

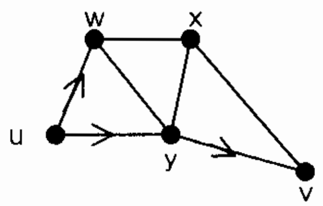
ดังนั้น ตามทฤษฎีบท 7.5 จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันใน D(H) เท่ากับจำนวนต่ำสุดของเส้นเชื่อมใน D(G) ซึ่งแยกจุดยอด u จาก v

ทฤษฎีบท 7.6

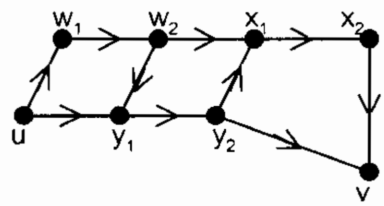
ถ้า u และ v เป็นจุดยอดซึ่งไม่ประชิดกันในกราฟเชื่อมโยงระบุทิศทาง D จำนวนสูงสุดของวิถี uv ที่ไม่มีจุดยอดร่วมกัน เท่ากับจำนวนต่ำสุดของจุดยอดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

พิสูจน์

เขียนกราฟระบุทิศทาง D ใหม่ เป็นกราฟระบุทิศทาง D_1 ในลักษณะที่จุดยอด 1 จุดใน D เช่น จุด w (ยกเว้นจุด u และ v) เขียนใหม่เป็น 2 จุด คือ w_1 กับ w_2 ใน D_1 และเส้นเชื่อมใน D ซึ่งมีทิศทางไปยัง w เขียนให้มีทิศทางไปยัง w_1 ใน D_1 ส่วนเส้นเชื่อมระบุทิศทางออกจาก w ใน D เขียนให้มีทิศทางออกจาก w_2 ใน D_1 (ดังรูป)



D



D_1

เห็นได้โดยชัดเจนว่าวิถี uv ตั้งแต่สองวิถีขึ้นไปใน D จะไม่มีจุดยอดร่วมกันก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อวิถี uv ที่สมนัยใน D_1 ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน ดังนั้นใช้ทฤษฎีบท 7.5 กับกราฟ D_1 จะได้ว่าจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันเท่ากับจำนวนต่ำสุดของจุดยอดซึ่งทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง ใน D

ข้อสังเกต

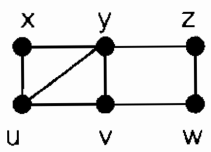
ในกราฟเชื่อมโยง G ซึ่งจุดยอด u และ v ไม่เป็นจุดประชิด จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน เท่ากับ จำนวนต่ำสุดของจุดยอดที่ทำให้วิถี uv ขาดความเชื่อมโยง

⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘

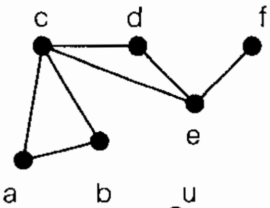
แบบฝึกหัด

1. กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีจุดตัดที่ใดบ้าง

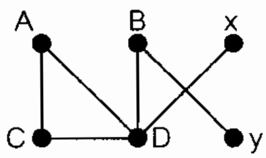
1.1



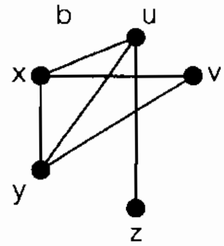
1.2



1.3

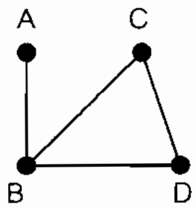


1.4

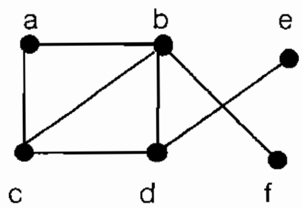


2. กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีสะพานที่ใดบ้าง

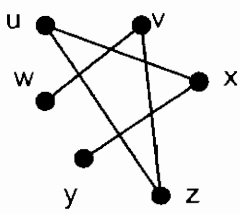
2.1



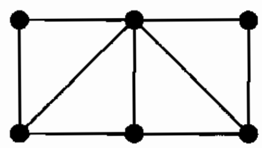
2.2



2.3

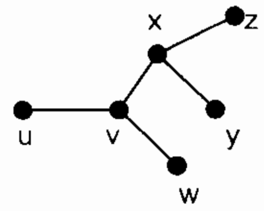


2.4

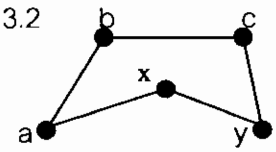


3. ให้หาจำนวนจุดตัด $\propto$ (G) และ จำนวนเส้นตัด β(G) ที่ทำให้กราฟต่อไปนี้ขาดความเชื่อมโยง

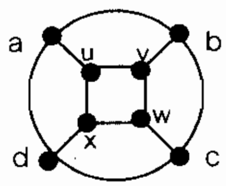
3.1



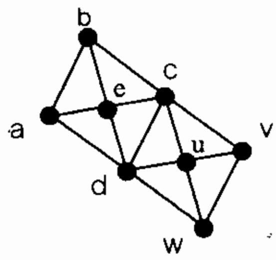
3.2



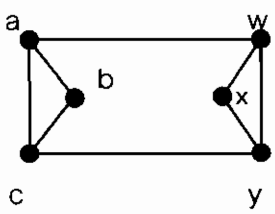
3.3



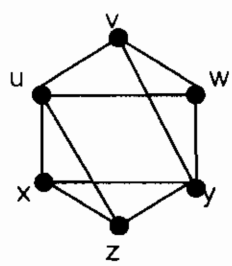
3.4



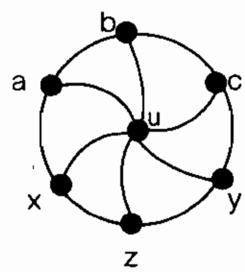
3.5



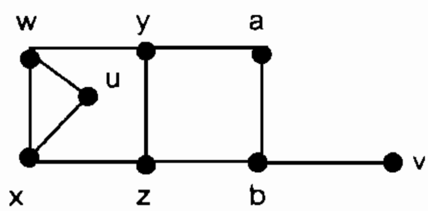
3.6



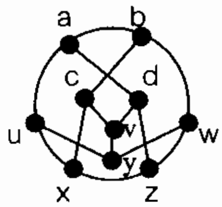
3.7



4. ให้หาเซตของเส้นตัดและเซตของจุดตัดสำหรับกราฟต่อไปนี้



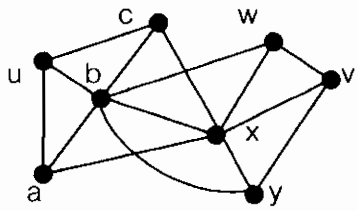
5. ให้หาเซตของเส้นตัดของกราฟ G ที่มี



5.1 3 เส้น 5.2 4 เส้น

5.3 5 เส้น 5.4 6 เส้น

6. จากกราฟ



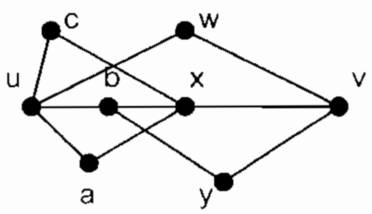
ให้หา

6.1 วิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน จำนวน 3 วิถี

6.2 วิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน แต่มีจุดยอดร่วมกัน จำนวน 2 วิถี

6.3 วิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน จำนวน 2 วิถี

7. จากกราฟ



ให้หา

7.1 วิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน จำนวน 3 วิถี

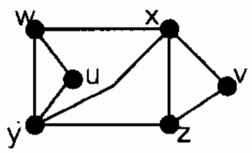
7.2 เซตของเส้นเชื่อม 3 เส้น ซึ่งทำให้ไม่มีวิถี uv

7.3 จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน

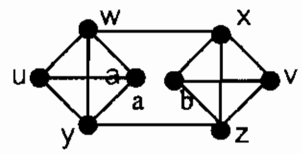
8. จงพิสูจน์ว่าถ้ามีวิถี uv ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันจำนวน 2 วิถี วิถี ทั้งสองต้องไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกันด้วย

ให้หา จำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน ของกราฟต่อไปนี้ (หาวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน จำนวน n วิถี และหาเส้นเชื่อม n เส้น ซึ่งถ้าลบออกจะทำให้ไม่มีวิถี uv)

8.1

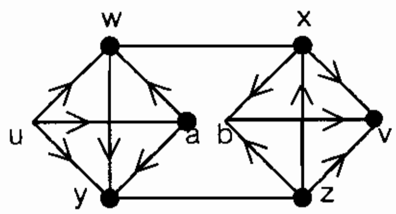


8.2

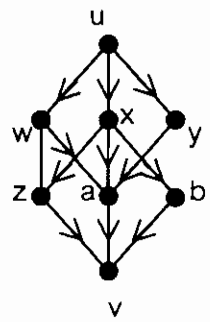


9. ให้หาจำนวนสูงสุดของวิถี uv ซึ่งไม่มีเส้นระบุทิศทางร่วมกันของกราฟระบุทิศทางต่อไปนี้

9.1



9.2



บทที่ 8
กราฟต้นไม้ (Trees)

8.1 นำเรื่อง

กราฟต้นไม้ได้รับการนำมาใช้เป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. 2390 เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จากงานของกุสตาฟ เคอร์ชอฟ และต่อมาอาร์เธอร์ เคย์เลย์ ได้นำมาใช้ทางด้านเคมีในปี พ.ศ. 2400 ปัจจุบันกราฟต้นไม้ได้ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางทางด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์

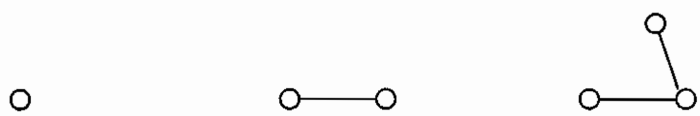
สถานการณ์ในชีวิตจำนวนมากมีความเกี่ยวข้องกับการดำเนินงานที่สามารถใช้กราฟต้นไม้ช่วยพิจารณาเพื่อหาวิธีประหยัดค่าใช้จ่าย หรือช่วยในการจัดงบประมาณเพื่อให้ได้ประโยชน์สูงสุดในการบริหารงานต่าง ๆ เช่น การสร้างเส้นทางคมนาคม การวางสายโทรศัพท์ และการขนส่งเป็นต้น

8.2 กราฟต้นไม้

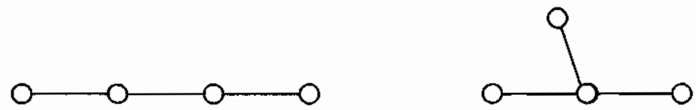
บทนิยาม 8.2.1
กราฟต้นไม้คือกราฟเชื่อมโยงซึ่งไม่มีวงเวียน

ตัวอย่างที่ 1

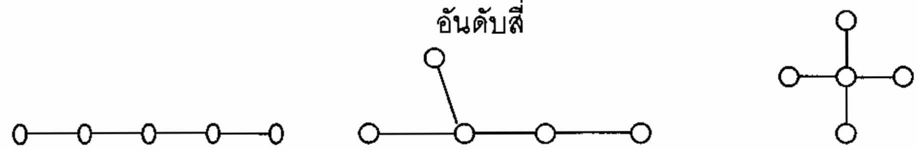
กราฟต้นไม้อันดับหนึ่ง อันดับสอง และอันดับสาม จะมีเพียง 1 แบบ ในขณะที่กราฟอันดับสี่มี 2 แบบ กราฟอันดับห้ามี 3 แบบ และกราฟอันดับหกมี 6 แบบ ดังต่อไปนี้



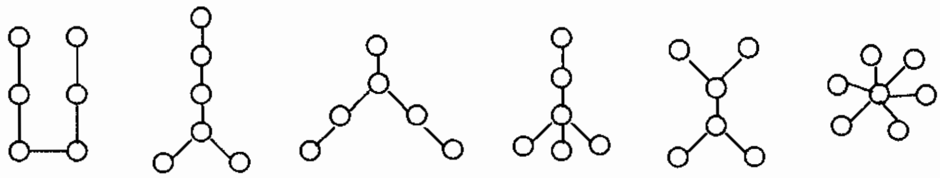
อันดับหนึ่ง   อันดับสอง   อันดับสาม



อันดับสี่



อันดับห้า



อันดับหก

จะเห็นได้ว่า กราฟต้นไม้เมื่อเพิ่มจุดยอด 1 จุด และเส้นเชื่อมใหม่ 1 เส้น จะได้กราฟต้นไม้ใหม่ ซึ่งในแต่ละชั้นจำนวนจุดยอดจะมากกว่าจำนวนเส้นเชื่อมอยู่ 1 หน่วย ดังนั้น กราฟต้นไม้อันดับ n จะมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น นอกจากนั้นเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟต้นไม้เป็นสะพาน ดังนั้น จึงมีข้อความเชิงสมมูลของกราฟต้นไม้ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1

ถ้า T เป็นกราฟอันดับ n ข้อความต่อไปนี้มีความสมมูล

(ก) T เป็นกราฟเชื่อมโยง และไม่มีวงเวียน

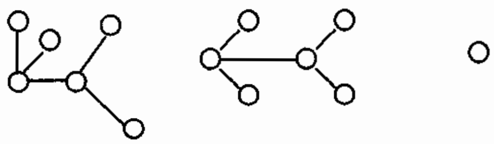
(ข) T เป็นกราฟเชื่อมโยง และมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น

(ค) T เป็นกราฟเชื่อมโยง และเส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสะพาน

(ง) T ไม่มีวงเวียน แต่ถ้าเพิ่มเส้นเชื่อมใด ๆ 1 เส้น จะทำให้เกิดวงเวียน 1 วงเวียน

บทนิยาม 8.2.2
กราฟป่าไม้ คือกราฟที่ไม่มีวงเวียน

ตัวอย่างที่ 2

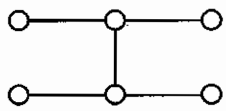


กราฟป่าไม้

จะเห็นได้ว่าแต่ละส่วนประกอบของกราฟป่าไม้เป็นกราฟต้นไม้

บทนิยาม 8.2.3 เส้นผ่าศูนย์กลาง
จำนวนเส้นเชื่อมในวิถีซึ่งยาวที่สุดของกราฟต้นไม้ เรียกว่า เส้นผ่าศูนย์กลาง

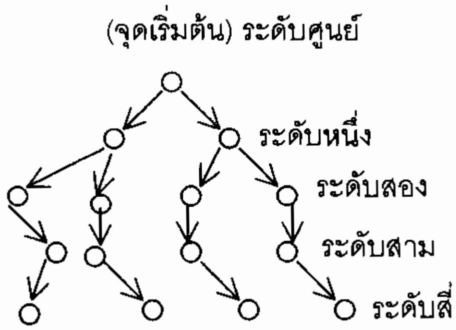
ตัวอย่างที่ 3



กราฟต้นไม้อันดับหก ในตัวอย่างนี้มีเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 3

8.3 กราฟรากไม้

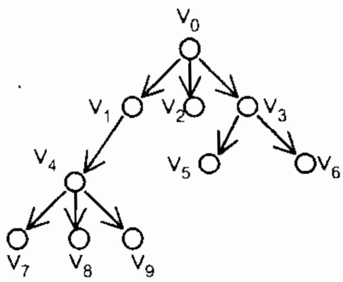
กราฟต้นไม้ทำให้เป็นกราฟรากไม้ได้ด้วยการกำหนดจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดเริ่มต้น จากนั้นระบุทิศทางตามเส้นเชื่อมที่โยงออกไปยังจุดยอดต่าง ๆ ที่ต่อจากจุดเริ่มต้น กำหนดให้จุดเริ่มต้นมีระดับเป็นศูนย์ จุดถัดไปมีระดับหนึ่ง และจุดถัดไปมีระดับสอง ระดับสาม ตามลำดับ



จะเห็นได้ว่าระดับของจุดยอดใด ๆ คือ จำนวนเส้นจากจุดยอดนั้นไปยังจุดเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 4

จากกราฟรากไม้ที่กำหนดให้จงหาระดับของ V_5 และ V_8



วิธีทำ

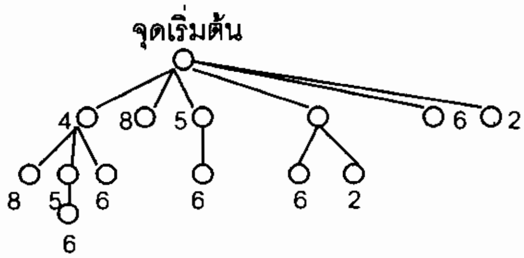
ระดับของจุดยอดใด ๆ คือ จำนวนเส้นจากจุดยอดนั้นไปยังจุดเริ่มต้น ดังนั้น V_5 มีระดับสอง และ V_8 มีระดับ 3

ตัวอย่างที่ 5

จากลำดับก่อนหลังของจำนวน 4,8,5,0,6,2 ที่กำหนดให้ จะมีวิธีทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด ในการเขียนจำนวนเรียงลำดับซึ่งค่าเพิ่มขึ้น

วิธีทำ

จะเห็นได้ว่าวิธีหนึ่ง คือ 4,5,6 หรืออีกวิธีหนึ่ง คือ 0,2 แต่เรียงลำดับจำนวน 2,4 ไม่ได้ เพราะแตกต่างจากลำดับที่กำหนดให้ตามวิธีการนี้สามารถแสดงให้เห็นชัดเจนได้ด้วยกราฟว่ามีวิธีทั้งหมด 13 วิธี คือ 4; 4,8 ; 4,5 ; 4,5,6 ; 4,6 ; 8 ; 5 ; 5,6 ; 0 ; 0,6 ; 0,2 ; 6 ; 2

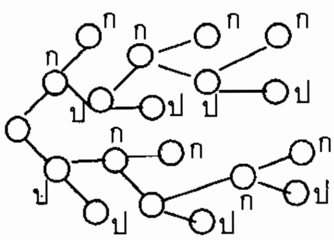


ตัวอย่างที่ 6

แก่นเพชร กับ เป็นกลาง ตกลงกันว่าในการเล่นหมากรุก ผู้ที่ชนะ 2 เกมติดต่อกัน หรือเล่นชนะรวม 3 เกม จะสิ้นสุดการเล่นเกมและผู้ชนะจะได้รับรางวัล 500 บาท ให้ใช้กราฟต้นไม้แสดงว่าผลลัพธ์ของการเล่นจะเป็นอย่างไรบ้าง และจำนวนการเล่นเกมสูงสุดที่แก่นเพชร กับ เป็นกลาง จะเล่นได้เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

ผลลัพธ์การเล่นมีทางเป็นไปได้ทั้งหมด 10 วิธี ตามจำนวนจุดยอดของดีกรี ในกราฟต้นไม้และจำนวนการเล่นเกมสูงสุดคือ 5 เกม จะได้ผู้ชนะ



ทฤษฎีบท 8.2

ถ้า u และ v เป็นจุดยอด 2 จุดใด ๆ ในกราฟต้นไม้ T จะมีวิถีจาก u ถึง v ใน T เพียง 1 วิถี

<u>พิสูจน์</u>

เพราะว่ากราฟต้นไม้มีความเชื่อมโยง ดังนั้น จะต้องมีวิถีจาก u ถึง v อย่างน้อยที่สุด 1 วิถี ถ้ากราฟ T มีวิถีจาก u ถึง v มากกว่า 1 วิถี ให้วิถีทั้งสอง คือ P_1 กับ P_2 เนื่องจากวิถี P_1 ต่างจากวิถี P_2 ดังนั้นเมื่อเริ่มวิถีที่จุดยอด w (w = u) จุดที่ต่อจาก w ในวิถี P_1 ต้องแตกต่างจากจุดที่ต่อจาก w ในวิถี P_2 และเพราะว่าวิถี P_1 และวิถี P_2 ต่างสิ้นสุดที่จุด v ดังนั้นต้องมีจุดยอด x (x = v) ซึ่งอยู่ในวิถี P_1 และ P_2

จะเห็นได้ว่าในลักษณะเช่นนี้ส่วนของวิถี P_1 จาก w ไปยัง x กับส่วนของวิถี P_2 จาก w ไปยัง x ทำให้เกิดวงเวียนใน T ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของกราฟ T ที่ไม่มีวงเวียนสรุปได้ว่ากราฟ T ต้องมีวิถีจาก u ถึง v เพียง 1 วิถี

<u>ทฤษฎีบท</u> 8.3

กราฟต้นไม้ T ซึ่งมีอันดับ P และขนาด q จะมีความสัมพันธ์ในรูป q = p - 1

<u>พิสูจน์</u> (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)

ให้ S_n แทนกราฟต้นไม้อันดับ n ซึ่งมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น S_1 เป็นจริง เพราะกราฟต้นไม้อันดับหนึ่งมีเพียงกราฟเดียวที่เส้นเชื่อมเป็นศูนย์ ให้ $k > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ S_i เป็นจริงสำหรับ $1 \leq i < k$ ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้อันดับ k ให้ e = vw เป็นเส้นเชื่อมใน T ดังนั้นกราฟ T - e ขาดความเชื่อมโยง และเป็นกราฟที่มีส่วนประกอบอย่างน้อย 2 ส่วน ให้เป็น T_1 ซึ่งมีจุดยอด v และ T_2 มี จุดยอด w ถ้าส่วนประกอบ T_1 มีอันดับ k_1 และส่วนประกอบ T_2 มีอันดับ k_2 จะเห็นได้ว่า $1 \leq k_1 < k$ และ $1 \leq k_2 < k$ ซึ่ง $k_1 + k_2 = k$ (กราฟ T มีอันดับ k) เนื่องจาก S_{k1} และ S_{k2} ต่างเป็นจริง ดังนั้น T_1 มีขนาด $(k_1 - 1)$ และ T_2 มีขนาด $(k_2 - 1)$

$\therefore$ กราฟ T มีขนาด $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 1 = k_1 + k_2 - 1 = k - 1$

แสดงว่า S_k เป็นจริง ซึ่งหมายถึงว่า S_n เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นั่นคือ กราฟต้นไม้อันดับ p ขนาด q จะมีความสัมพันธ์

$$q = p - 1$$

ตัวอย่างที่ 7

ถ้ากราฟ G มีจุดยอด 10 จุด และเส้นเชื่อม 12 เส้น กราฟ G เป็นกราฟต้นไม้ได้หรือไม่

วิธีทำ

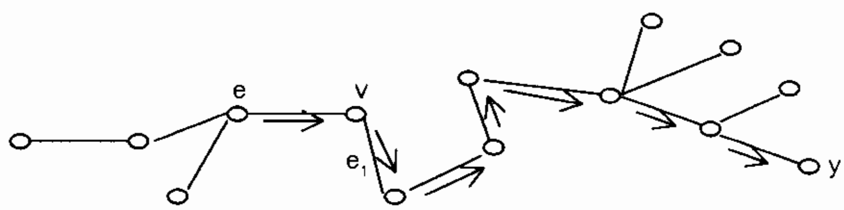
กราฟ G ไม่ใช่กราฟต้นไม้เพราะตามทฤษฎีบท 8.3 กราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอด 10 จุด จะต้องมีเส้นเชื่อม 9 เส้น

ทฤษฎีบท 8.4

กราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด จะมีจุดยอดอย่างน้อยที่สุดจำนวน 1 จุด ซึ่งมีดีกรี 1

พิสูจน์

ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด เลือกจุดยอด v ใน T และเส้นเชื่อม e ที่ v (ต้องมีเส้นเชื่อมจาก v เพราะ T เป็นกราฟต้นไม้และมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด) เลือกเส้น e_1 จาก v เมื่อวิถี v ถึงจุดยอดใหม่ w ถ้า w มีดีกรี 1 เป็นอันสิ้นสุด ถ้าจุดยอดใหม่มีดีกรีมากกว่า 1 เลือกเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดใหม่ โดยไม่ซ้ำกับเส้นเชื่อมที่เข้ามา เนื่องจาก T ไม่มีวงเวียน ดังนั้นจะไม่มีการซ้ำจุดยอด และเพราะว่าจุดยอดใน T มีจำนวนนับได้ ดังนั้นวิถีจาก v จะต้องสิ้นสุดที่จุดยอดใหม่ y ซึ่งมีดีกรี 1 (ดังรูป)



ทฤษฎีบท 8.5

กราฟต้นไม้ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 1 จุด ต้องมี 2 จุดที่มีดีกรี 1

พิสูจน์ (ใช้ความขัดแย้ง)

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้อันดับ n มีจุดยอด $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ และขนาด n - 1

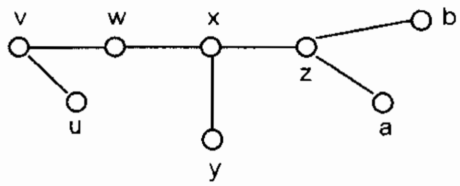
แสดงว่า $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1) = 2n-2$ เนื่องจากกราฟ T มีบางจุดซึ่งมีดีกรี 1 สมมุติให้ V_1 มีดีกรี 1 ดังนั้นจุดยอด n - 1 จุด ที่เหลือมีดีกรี 2 หรือมากกว่า และผลรวมของดีกรีของจุดอย่างน้อยที่สุดต้องเท่ากับ 1 + 2(n-1) หรือ 2n-1 ซึ่งเป็นจำนวนคี่ (ความขัดแย้ง) แสดงว่านอกจากจุด V_1 จะต้องมีจุดยอดอีก 1 จุด ซึ่งมีดีกรี 1 ด้วย

บทนิยาม 8.2.4 จุดปลาย - จุดภายใน

จุดยอดในกราฟต้นไม้ซึ่งมีดีกรี 1 เรียกว่าจุดปลาย ส่วนจุดยอดที่มีดีกรีมากกว่า 1 เรียกว่าจุดภายใน

ตัวอย่างที่ 8

ให้หาจุดปลายและจุดภายในทั้งหมดของกราฟต่อไปนี้



วิธีทำ

จุดยอด u , y , a และ b เรียกว่าจุดปลาย

จุดยอด v , w, x และ z เรียกว่าจุดภายใน

ทฤษฎีบท 8.6

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ C เป็นวงจรใน G ถ้าลบเส้นเชื่อม 1 เส้นออกจาก C กราฟที่เหลืออยู่เป็นกราฟเชื่อมโยง

<u>พิสูจน์</u>

ให้ e เป็นเส้นเชื่อมในวงจร C และ H = G - e

V(H) = V(G) แต่ E(G) - e = E(H) (เพื่อแสดงว่า H มีความเชื่อมโยง ต้องแสดงให้เห็นว่าถ้า u กับ w เป็นจุดยอด 2 จุดใด ๆ ในกราฟ H จะต้องมีแนวเดินใน H จาก u ถึง w) เนื่องจากเซตของจุดยอดใน G และ H เหมือนกัน ถ้า u และ w เป็นจุดยอดใน G จุดยอดทั้งสองต้องอยู่ใน H ด้วย และเพราะว่า G เชื่อมโยง ดังนั้นต้องมีแนวเดิน P ใน G จาก u ถึง w

<u>กรณี 1</u> (e ไม่อยู่ใน P)

เส้นเชื่อมใน G ที่ไม่มีใน H คือ e ดังนั้นในกรณีนี้ P เป็นแนวเดินใน H ดังนั้นในกรณีนี้ P เป็นแนวเดินใน H ด้วย นั่นคือ มีแนวเดินจาก u ถึง w ใน H

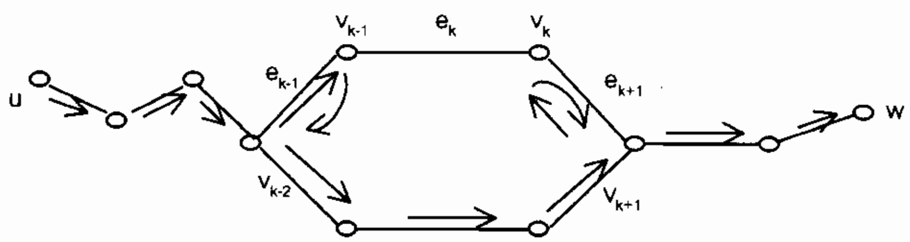
<u>กรณี 2</u> (e อยู่ใน P)

กรณีนี้แนวเดิน P จาก u ถึง w รวมส่วนของวงจร C ที่มีเส้นเชื่อม e ให้ C เป็นวงจร ดังนี้

$$C = v_0 , e_1, v_1 , e_2 , v_2 , \ldots\ldots e_n , v_n (=v_0)$$

ให้ $e = e_k$ ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งใน C ดังนั้นแนวเดิน P จะมีลำดับแนวเดิน v_{k-1} , e_k , v_k หรือ v_k , e_k , v_{k-1} ถ้าแนวเดิน P มีลำดับเป็น v_{k-1}, e_k , v_k กำหนดให้แนวเดินทวนเข็มนาฬิกาเป็น P_1 เพื่อไปจาก v_{k-1} ถึง v_k ดังนี้

$$P_1 : \; v_{k-1} , e_{k-1} , v_{k-2} , \ldots, v_0 , e_n , v_{n-1} , \ldots, e_{k+1} , v_k$$



แนวเดินทวนเข็มนาฬิกาจาก v_{k-1} ไป v_k โดยเลี่ยง e_k ถ้าแนวเดิน P มีลำดับเป็น v_k , e_k , v_{k-1} กำหนดแนวเดินตามเข็มนาฬิกาเป็น P_2 เพื่อไปจาก v_{k-1} ถึง v_k ดังนี้

$$P_2 : \; v_k , e_{k+1} , v_{k+1} , \ldots, v_n , e_1 , v_1 , e_k, \ldots, e_{k-1} , v_{k-1}$$

จากนี้ต่อ P_1 หรือ P_2 กับ P ได้แนวเดินใหม่จาก u ถึง w เช่นถ้าต่อ P_1 กับ P ให้เริ่มด้วยส่วนของ P จาก u ถึง v_{k-1} แล้วต่อด้วย v_{k-1} ถึง v_k จาก P_1 และต่อส่วนของ P จาก v_k ถึง w ถ้าแนวเดินใหม่นี้ยังรวมเส้น e ให้ใช้วิธีการข้างต้นซ้ำใหม่จนไม่มีเส้นเชื่อม e ในแนวเดิน ผลลัพธ์ คือ ได้แนวเดินจาก u ถึง w ใน H ที่ไม่รวมเส้นเชื่อม e และเนื่องจากจุดยอด u และ w เป็นจุดใด ๆ ดังนั้นทั้งในกรณี 1 และ กรณี 2 H มีความเชื่อมโยง

<u>ทฤษฎีบท 8.7</u>

ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงอันดับ p และขนาด p-1 แล้ว G เป็นกราฟต้นไม้

<u>พิสูจน์</u> (โดยใช้ความขัดแย้ง)

ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงใด ๆ ที่มีอันดับ p และขนาด p - 1 (เนื่องจากกราฟต้นไม้มีความเชื่อมโยงและไม่มีวงจร ดังนั้น จึงเพียงแต่แสดงว่า กราฟ G ไม่มีวงจร)

ถ้ากราฟ G มีวงจร C ดังนั้นตามทฤษฎีบท 8.5 เมื่อลบเส้นเชื่อมออกจากวงจร C 1 เส้น กราฟ G ที่เหลือจะยังมีความเชื่อมโยง ถ้าให้ G_1 เป็นกราฟที่ลงเส้นเชื่อมออกจากวงจร และถ้าปรากฏว่ายังมีวงจรในกราฟ G_1 ให้ลบเส้นเชื่อมออกจากวงจรอีก 1 เส้น ให้ทำตามกระบวนการเช่นนี้ซ้ำจนกว่าจะได้กราฟ G_k ซึ่งยังมีความเชื่อมโยงแต่ไม่มีวงจร ซึ่งตามบทนิยาม G_k เป็นกราฟต้นไม้

เนื่องจากไม่มีจุดยอดใด ๆ ถูกลบออกจากกราฟ G ดังนั้น G_k มีจำนวนจุดยอดเท่ากับ p ดังนั้นตามทฤษฎีบท 8.3 กราฟ G_k มีเส้นเชื่อมจำนวน p - 1 เส้น แต่ตามสมมุติฐานที่กำหนดว่า G มีวงจร C จึงให้ลบเส้นเชื่อมออก 1 เส้น แสดงว่าจะต้องมีการลบเส้นเชื่อม 1 เส้นออกจาก G เพื่อให้ได้กราฟ G_k แสดงว่า G_k จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมไม่เกินกว่า (p-1) - 1 = p - 2 เส้น ทำให้ได้ข้อขัดแย้งแสดงว่าสมมุติฐานทีกราฟ G มีวงจร C นั้นไม่จริง นั่นคือ กราฟ G ไม่มีวงจร และ G เป็นกราฟต้นไม้

ทฤษฎีบท 8.6 กำหนดไว้ว่า <u>กราฟเชื่อมโยง</u>อันดับ p และขนาด p - 1 (p จำนวนเต็มบวก) เป็นกราฟต้นไม้ แต่กราฟซึ่งมีอันดับ p และขนาด p -1 ไม่จำต้องเป็นกราฟต้นไม้

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>

ให้ยกตัวอย่างกราฟอันดับ 5 และขนาด 4 ซึ่งไม่เป็นกราฟต้นไม้

<u>วิธีทำ</u>

ตามทฤษฎีบท 8.6 กราฟที่กำหนดเช่นนี้ต้องไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังเช่น กราฟข้างล่างนี้

8.4 **<u>กราฟต้นไม้ทวิภาค</u>** (binary trees)

ในเรื่องของกราฟรากไม้ <u>ความสูง</u>ของกราฟรากไม้คือระดับสูงสุดวัดจากจุดยอดในกราฟนั้น และถ้าให้ v เป็นจุดยอดใด ๆ ของกราฟรากไม้จุดยอดซึ่งประชิดกับจุด v และอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นมากกว่าจุด v หนึ่งระดับ เรียกว่า <u>จุดสืบต่อ</u> และเรียก v ว่าจุดก่อกำเนิด ถ้าจุดสืบต่อของ v มีสองจุดจะเรียกว่า <u>จุดเครือญาติ</u> ดังนั้นในกราฟรากไม้เมื่อกำหนดจุดยอด v และ w ถ้า v อยู่บนวิถีเดียวระหว่าง w กับจุดกำเนิด จะเรียกจุด v ว่า <u>จุดเผ่าพันธ์</u>ของ w และเรียก w ว่า <u>จุดสืบเชื้อสาย</u> ของ v

กราฟรากไม้ซึ่งจุดยอดทุกจุดมีจุดสืบต่ออย่างมากที่สุด 2 จุด และแต่ละจุดถูกกำหนดให้เป็นจุดสืบต่อทางซ้าย (หนึ่งเดียว) หรือจุดสืบต่อทางขวา (หนึ่งเดียว) จะมีชื่อเรียกกราฟรากไม้แบบนี้ว่ากราฟต้นไม้ทวิภาค

บทนิยาม 8.4.1

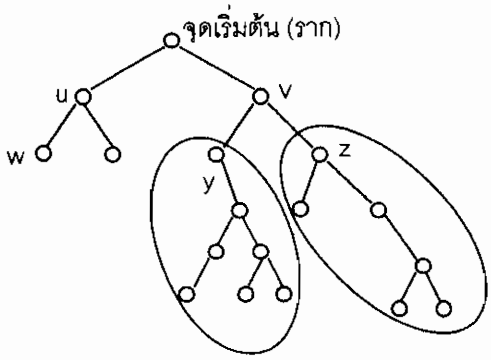
กราฟต้นไม้ทวิภาค คือกราฟรากไม้ซึ่งจุดยอดภายในทุกจุดมีจุดสืบต่อได้อย่างมากที่สุด 2 จุด จุดสืบต่อถูกกำหนดไว้ว่าเป็นจุดทางซ้ายหรือทางขวา จุดภายในมีจุดสืบต่อทางซ้ายและทางขวาได้อย่างละ 1 จุด กราฟต้นไม้ทวิภาคเป็นแบบสมบูรณ์ถ้าจุดภายในแต่ละจุดมีจุดสืบต่อเพียง 2 จุด เท่านั้น

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีจุดยอด v เป็นจุดภายใน <u>กราฟต้นไม้ย่อยทางซ้าย</u>ของ v มีจุดยอดในกราฟประกอบด้วยจุดสืบต่อและจุดสืบเชื้อสายทั้งหลายของจุดยอด v รวมกับเส้นเชื่อมทั้งหลายใน T ที่โยงจุดทางซ้ายไว้ด้วยกันในกราฟต้นไม้ย่อยทางซ้าย

<u>กราฟต้นไม้ย่อยทางขวา</u>ของ v มีบทนิยามในทำนองเดียวกันกับกราฟต้นไม้ย่อยทางซ้ายของ v

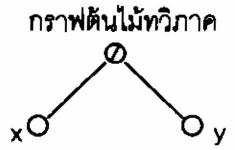
ตัวอย่างที่ 10

กราฟตัวอย่างของกราฟต้นไม้ทวิภาค และกราฟต้นไม้ย่อย



ตามบทนิยาม w เป็นจุดสืบต่อทางซ้ายของ u ส่วน z เป็นจุดสืบต่อทางขวาของ v กราฟต้นไม้ย่อยทางซ้ายของ v เริ่มจาก y และกราฟต้นไม้ย่อยทางขวาของ v เริ่มจาก z

กราฟต้นไม้ทวิภาคได้รับการนำไปใช้ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้แทนนิพจน์ทางพีชคณิตที่เกี่ยวกับการซ้อนในวงเล็บที่สมดุลย์ เช่น



ใช้แทน $\frac{x}{y}$

จะเห็นได้ว่าตัวดำเนินการอยู่ที่จุดกำเนิดทำกับจุดสืบต่อทางซ้ายและจุดสืบต่อทางขวาของจุดกำเนิดตามแนวจากซ้ายไปขวา

ตัวอย่างที่ 11

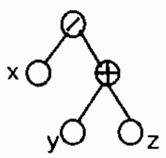
ให้ใช้กราฟต้นไม้ทวิภาค แทนนิพจน์ทางพีชคณิต

(ก) x/(y+z) (ข) [(u-v).w] + (x/y)

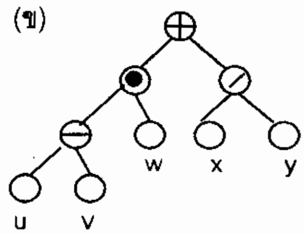
วิธีทำ

ให้จุดภายในเป็นตัวดำเนินการเลขคณิต จุดปลายเป็นตัวแปร และมีจุดยอดเป็นตัวดำเนินการต่อกราฟต้นไม้ย่อยทางซ้ายและทางขวาโดยเริ่มจากซ้ายไปขวา

(ก)



(ข)



มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับกราฟต้นไม้ทวิภาคที่น่าสนใจทฤษฎีหนึ่งซึ่งกล่าวว่าถ้ารู้จำนวนจุดยอดภายในของกราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ จะสามารถหาจำนวนจุดยอดทั้งหมดตลอดจนจำนวนจุดปลายด้วย และในทางกลับกันถ้ารู้จำนวนจุดยอดและจุดปลายจะสามารถหาจุดยอดภายในของกราฟต้นไม้ทวิภาค กล่าวโดยเฉพาะคือ กราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ ซึ่งมีจุดภายใน k จุด จะมีจุดยอดทั้งหมด 2k + 1 จุด ซึ่งในจำนวนนี้มีจุดปลายจำนวน k + 1 จุด

ทฤษฎีบท 8.8

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดภายใน k จุด (k จำนวนเต็มบวก) T จะมีจุดยอดทั้งหมดจำนวน 2k + 1 จุด และจุดปลาย k + 1 จุด

พิสูจน์

ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดภายใน k จุดเพราะว่าเซตของจุดยอดทั้งหมดใน T สามารถแบ่งออกเป็นเซตย่อย 2 เซต ที่ไม่มีส่วนร่วมกันคือ เซตของจุดยอดทั้งหมดที่มีจุดให้กำเนิดกับไม่มีจุดให้กำเนิด ใน T มีจุดยอดจุดเดียวที่ไม่มีจุดให้กำเนิด คือ จุดเริ่มต้น (ราก) และเนื่องจากจุดยอดภายในทุกจุดของ T มีจุดสืบต่ออย่างแน่นอนจำนวน 2 จุด ดังนั้น จำนวนจุดยอดที่มีจุดให้กำเนิดจึงเป็น 2 เท่า ของจุดให้กำเนิด หรือ 2k เพราะจุดให้กำเนิดแต่ละจุดคือจุดภายใน นั่นคือ

จำนวนจุดยอดทั้งหมดใน T = จำนวนจุดที่มีจุดให้กำเนิด + จำนวนจุดที่ไม่มีจุดให้กำเนิด

= 2k + 1 (1)

แต่เป็นจริงที่จำนวนจุดยอดทั้งหมดใน T เท่ากับจำนวนจุดยอดภายในรวมกับจำนวนจุดปลาย นั่นคือ

จำนวนจุดยอดทั้งหมดใน T = จำนวนจุดภายใน + จำนวนจุดปลาย

= k + จำนวนจุดปลาย (2)

ดังนั้น

2k + 1 = k + จำนวนจุดปลาย

แสดงว่า

จำนวนจุดปลาย = (2k + 1) - k = k + 1

นั่นคือ จำนวนจุดยอดทั้งหมด 2k + 1 จุดและจำนวนจุดปลาย k + 1 จุด

ตัวอย่างที่ 12

จงแสดงให้เห็นว่ากราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดยอดภายใน 10 จุดจะมีปลาย 13 จุดได้หรือไม่

วิธีทำ

เพราะว่าตามทฤษฎีบท 8.7 กราฟต้นไม้ทวิภาคแบบสมบูรณ์ซึ่งมีจุดภายใน k จุด จะมีจุดปลาย k + 1 จุด ดังนั้น กราฟในตัวอย่างนี้มีจุดปลาย 10 + 1 = 11 จุด ไม่ใช่ 13 จุด

ทฤษฎีบท 8.9

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีจุดปลายจำนวน n จุด และความสูงเป็น r จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$n \leq 2^r$$

หรือ

$$\log_2 n \leq r$$

พิสูจน์

ใช้คณิตศาสตร์อุปนัยบน r พิสูจน์ว่า

สำหรับจำนวนเต็ม $r \geq 0$ ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ซึ่งมีความสูง r จำนวนสูงสุดของจุดปลาย T เท่ากับ 2^r

ให้ S(r) มีสมนัยว่า

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีความสูง r จำนวนจุดปลายของ T มีได้สูงสุด เท่ากับ 2^r

ขั้นแรก จะแสดงว่า S(r) เป็นจริงสำหรับ r = 0

ขั้นที่สอง จะแสดงว่าเมื่อ S(r) เป็นจริงสำหรับ r > k ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ S(r) เป็นจริงสำหรับ r

<u>ขั้นแรก</u> (จะต้องแสดงให้เห็นว่าถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีความสูงเป็น 0 จำนวน จำนวนจุดปลายของ T มีได้สูงสุดคือ 2^0)

ถ้า T เป็นกราฟต้นไม้ความสูงเป็น 0 แสดงว่า T เป็นกราฟต้นไม้ ซึ่งมีจุดยอดเพียง 1 จุด (จุดเริ่มแรก) ให้ n เป็นจำนวนจุดปลายของ T ดังนั้นเมื่อ T มีความสูงเป็น 0 แสดงว่า n = 0 และ r = 0

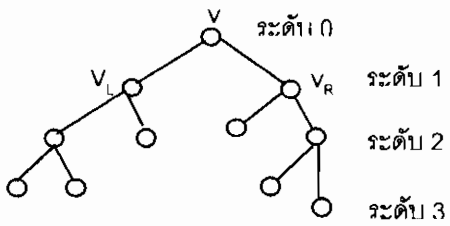
เนื่องจาก $0 \leq 2^r$ เพราะฉะนั้น $n \leq 2^r$ ถ้า T มีจุดยอด 1 จุด แสดงว่า n = 1 และ r = 0 เนื่องจาก $1 = 2^0$ เพราะฉะนั้น $n \leq 2^r$ ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด $n \leq 2^r$ ตามที่ต้องการพิสูจน์

<u>ขั้นที่สอง</u> (ถ้า $r \geq 1$ และสมบัติเป็นจริงที่ r > k ต้องแสดงว่าสมบัติเป็นจริงสำหรับ r ใด ๆ)

ให้ $r \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มและสำหรับ r > k แล้ว P(k) เป็นจริง นั่นคือ ถ้า r > k แล้วกราฟต้นไม้ทวิภาคซึ่งมีความสูง k มีจุดปลายสูงสุดเป็นจำนวน 2^k

เพื่อแสดงให้เห็นว่า P(r) เป็นจริง นั่นคือ ต้องแสดงว่ากราฟต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ซึ่งมีความสูง r จะมีจุดปลายสูงสุดเป็นจำนวน 2^r

ให้ T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาคมีความสูง r และมีจุดเริ่มแรก v เนื่องจาก $r \geq 1$ ดังนั้นจุด v ต้องมีจุดสืบต่ออย่างน้อยที่สุด 1 จุด คือ จุดสืบต่อทางซ้าย v_L และ(หรือ) จุดสืบต่อทางขวา v_R (ดังรูป)



กราฟต้นไม้ย่อยทางซ้าย กราฟต้นไม้ย่อยทางขวา

จะเห็นได้ว่า v_L และ v_R เป็นจุดเริ่มแรกของกราฟต้นไม้ย่อยของ v เรียกว่า T_L และ T_R (กราฟต้นไม้ย่อยอาจมีเพียงด้านเดียว) ในที่นี้ T_L และ T_R เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค เพราะว่า T เป็นกราฟต้นไม้ทวิภาค

ให้ r_L และ r_R เป็นความสูงของ T_L และ T_R เพราะว่ากราฟต้นไม้ T ได้จากการรวม T_L กับ T_R บวกกับ 1 ระดับ ดังนั้น $r_L \leq r - 1$ และ $r_R \leq r - 1$

ให้ n_L กับ n_R เป็นจำนวนของจุดปลายของ T_L กับ T_R และเพราะว่า T_L กับ T_R มีความสูงน้อยกว่า r ดังนั้นจากสมมุติฐานเชิงอุปนัย

$$n_L \leq 2^{r_L} \quad \text{และ } n_R \leq 2^{r_R}$$

แต่จุดปลายของ T ประกอบด้วยจำนวนจุดปลายของ T_L กับ T_R ดังนั้น $n = n_L + n_R \leq 2^{r_L} + 2^{r_R}$ (สมมุติฐานเชิงอุปนัย)

$$n \leq 2^{r-1} + 2^{r-1} \quad \text{(เพราะว่า } r_L \leq r - 1 \text{ และ } r_R \leq r - 1\text{)}$$

$$n \leq 2(2^{r-1}) \quad \text{(ใช้พื้นฐานทางพีชคณิต)}$$

$$n \leq 2^r$$

นั่นคือ จุดปลายมีจำนวนสูงสุดเท่ากับ 2^r (ตามต้องการ) สำหรับอสมการสมมูล $\log_2 n \leq r$ ได้โดยตรงจากความจริงที่ว่าฟังก์ชันลอกกริทึมฐานสองเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และจากบทนิยามของลอกริทึม นั่นคือถ้า

$$n \leq 2^r$$

ใส่ $\log_2$ ทั้งสองข้างได้

$$\log_2 n \leq \log_2 (2^r) = r$$

$$\log_2 n \leq r$$

ตามที่ต้องการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 13

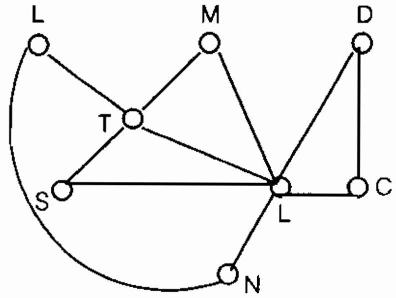
จงแสดงให้เห็นว่ามีกราฟต้นไม้ทวิภาค ซึ่งมีจุดปลายจำนวน 38 จุด และความสูง 5 หรือไม่

วิธีทำ

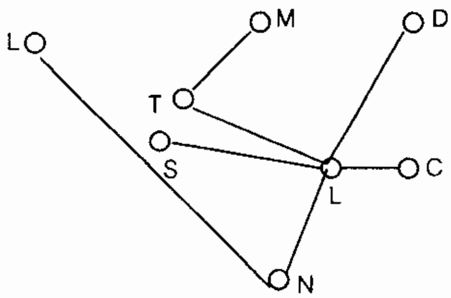
จากทฤษฎีบท 8.8 กราฟต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ซึ่งมีความสูง 5 จะมีจุดปลายจำนวนสูงสุดเท่ากับ $2^5 = 32$ จุด ดังนั้นไม่มีกราฟต้นทวิภาคซึ่งมีความสูง 5 และจุดปลาย 38 จุด

8.5 กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม (spanning tree)

บริษัทสายการบินแห่งหนึ่งต้องการขยายเส้นทางบิน และได้รับอนุญาตจากเจ้าหน้าที่รัฐบาลให้ใช้เส้นทางบินระหว่างสถานที่ต่าง ๆ ได้ ดังนี้



ถ้าบริษัทสายการบินต้องการใช้เส้นทางบินไปยังสถานที่ทุกแห่งแต่ต้องการประหยัดค่าใช้จ่ายของบริษัทด้วยการใช้เส้นทางบินน้อยที่สุดและเชื่อมโยงสถานที่ทุกแห่งซึ่งเส้นทางบินเลือกชุดหนึ่งเป็นดังนี้



จะเห็นได้ว่าเส้นทางบินครอบคลุมสถานที่ทุกแห่ง แต่เส้นทางบินชุดอื่นที่ครอบคลุมสถานที่ทุกแห่งเช่นเดียวกันมีหรือไม่ คำตอบคือชุดเส้นทางบิน ที่ทำให้บริษัทสายการบินพึงพอใจ คือ ชุดเส้นทางบินที่เป็นกราฟต้นไม้ ถ้ากราฟมีวงจร จะสามารถตัดเส้นทางบินหนึ่งเส้นในวงจรออกได้ โดยไม่ทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง จะเห็นได้ว่ากราฟต้นไม้ ซึ่งมีจุดยอด 8 จุด จะมีเส้นเชื่อม 7 เส้น ดังนั้นเส้นทางบินใด ๆ ที่เชื่อมสถานที่ทั้ง 8 แห่ง และประหยัดค่าใช้จ่ายจะมีเส้นทางบิน 7 เส้นทาง

<u>บทนิยาม</u> <u>8.5.1</u>
กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G คือกราฟย่อยของ G ที่รวมจุดยอดทุกจุดใน G และเป็นกราฟต้นไม้

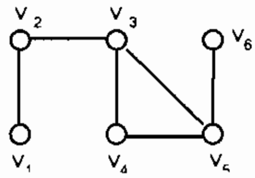
บทนิยามนี้เกี่ยวข้องกับข้อความสำคัญ 2 ประการ คือ

1. กราฟเชื่อมโยงทุกกราฟมีกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม
2. กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม 2 กราฟของกราฟเชื่อมโยงมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 14

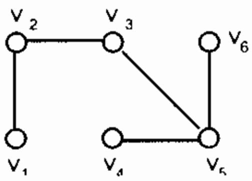
ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งหมดจากกราฟ G ที่กำหนดให้

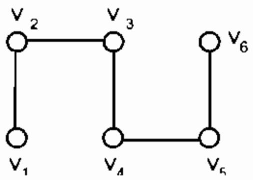
G

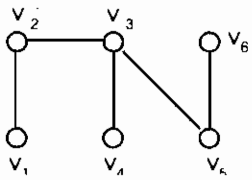


วิธีทำ

กราฟ G มีวงเวียน $v_3\, v_4\, v_5\, v_3$ ดังนั้นถ้าลบเส้นเชื่อมเส้นใดเส้นหนึ่งในวงเวียนจะได้กราฟต้นไม้ ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G 3 รูป ดังนี้



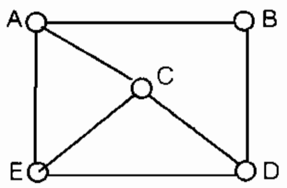




ตัวอย่างที่ 15

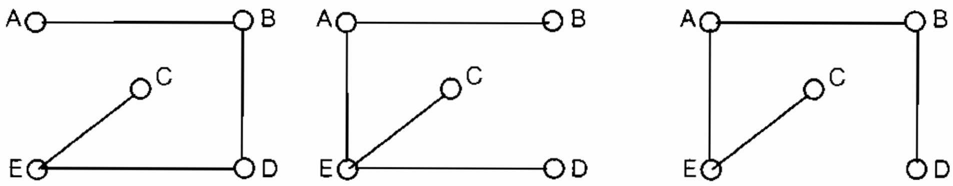
ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามจากกราฟ G ที่กำหนดให้

G :



วิธีทำ

ใช้วิธีการลบเส้นเชื่อมออกจากวงเวียนของกราฟ G จะได้กราฟแบบทอดข้าม 3 รูป



บทนิยาม 8.5.2

กราฟแสดงน้ำหนัก คือ กราฟซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นมีจำนวนจริงกำกับบอกน้ำหนักหรือระยะทาง ผลบวกของจำนวนจริงในเส้นเชื่อม คือน้ำหนักรวมหรือระยะทางทั้งหมด

กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด ของกราฟแสดงน้ำหนัก คือกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีน้ำหนักหรือระยะทางรวมทั้งหมดต่ำสุด เมื่อเปรียบเทียบกับกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามอื่น ๆ ของกราฟ

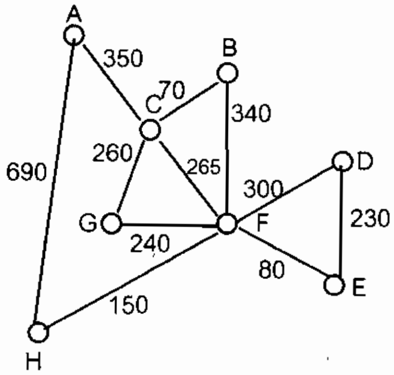
วิธีการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดวิธีหนึ่งคือหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งหมดของกราฟ แล้วหาน้ำหนักรวมของแต่ละกราฟ และเลือกกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามซึ่งมีค่าต่ำสุด แต่วิธีการเช่นนี้จะสิ้นเปลืองเวลา เพราะกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามมีเป็นจำนวนมาก เช่น กราฟสมบูรณ์ซึ่งมีจุดยอด n จุด จะมีกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามเป็นจำนวนถึง n^{n-2} กราฟ ดังนั้น จึงมีผู้คิดขั้นตอนวิธีซึ่งมีประสิทธิภาพมากกว่าในการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด เรียกว่า วิธีของพริม และวิธีของครัสแคล

8.6 **วิธีการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด**

ตามวิธีของครัสแคลเส้นเชื่อมของกราฟแสดงน้ำหนักได้รับการตรวจสอบแต่ละครั้งตามลำดับของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้น โดยในแต่ละขั้นที่เพิ่มเส้นเชื่อมเข้าไปในกราฟมีเงื่อนไขว่าต้องไม่ให้เกิดวงเวียน ภายหลังจากเพิ่มเส้นเชื่อมจำนวน n - 1 เส้น (n = จำนวนจุดยอด) จะได้กราฟแบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของกราฟที่กำหนดให้

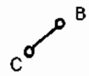
<u>ตัวอย่างที่</u> 13

จากกราฟเชื่อมโยงแสดงน้ำหนักที่กำหนดให้ จงหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดโดยใช้วิธีของครัสแคล

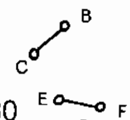


<u>วิธีทำ</u>

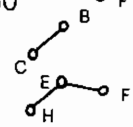
ขั้นแรก เลือกเส้นเชื่อมค่าต่ำสุด นั่นคือ BC น้ำหนัก 70



ขั้นที่สอง เลือกเส้นเชื่อมถัดไปที่น้ำหนักต่ำสุด ในที่นี้คือ EF น้ำหนัก 80



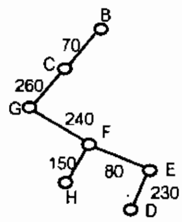
ขั้นที่สาม เลือกเส้นเชื่อมถัดไปที่น้ำหนักต่ำสุด คือ FH น้ำหนัก 150



ขั้นที่สี่ เลือก DE น้ำหนัก 230

ขั้นที่ 5 เลือก GF น้ำหนัก 240

ขั้นที่ 6 เลือก CG น้ำหนัก 260



ขั้นที่ 7 ไม่เลือก CF น้ำหนัก 265 เพราะจะเกิดวงเวียน CFGC

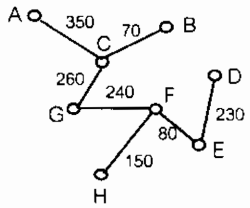
ขั้นที่ 8 ไม่เลือก DF น้ำหนัก 300 เพราะจะเกิดวงเวียน DEFD

ขั้นที่ 9 ไม่เลือก BF น้ำหนัก 340 เพราะจะเกิดวงเวียน BCGFB

ขั้นที่ 10 เลือก AC น้ำหนัก 350

ขั้นสุดท้าย ไม่เลือก AH น้ำหนัก 690 เพราะจะเกิดวงเวียน AHFGCA

ตามวิธีของครัสแคล จะได้กราฟต้นไม้ ดังรูป



วิธีการของครัสแคลใช้ได้ในกรณีของกราฟขนาดเล็ก แต่เมื่อกราฟขนาดใหญ่การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ไม่สะดวกที่ต้องเลือกเส้นเชื่อมตามลำดับน้ำหนักที่เพิ่มขึ้น และต้องไม่ให้เกิดวงเวียน ดังนั้น ต่อมาเพื่อแก้ไขปัญหานี้มีการใช้<u>วิธีการของพริม</u> (Prim's method) ซึ่งแตกต่างจากวิธีของครัสแคลในการหากราฟต้นไม้แบบทอดข้าม T ค่าต่ำสุดด้วยการต่อเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดใน T ด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมที่ยังไม่รวมอยู่ใน T คราวละ 1 จุด และ 1 เส้น เพื่อให้เห็นชัดเจนจะใช้วิธีการของพริมกับกราฟในตัวอย่างที่ 13 ดังต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 14</u>

ให้ใช้วิธีการของพริมหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของกราฟเชื่อมโยงในตัวอย่างที่ 13

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นแรก	เลือกจุดยอดให้ T เช่น จุด A
ขั้นสอง	เลือกจุดยอด C ได้เส้นเชื่อม AC น้ำหนัก 350
ขั้นสาม	เลือกจุดยอด B ได้เส้นเชื่อม BC น้ำหนัก 70
ขั้นสี่	เลือกจุดยอด G ได้เส้นเชื่อม CG น้ำหนัก 260
ขั้นห้า	เลือกจุดยอด F ได้เส้นเชื่อม GF น้ำหนัก 240
ขั้นหก	เลือกจุดยอด E ได้เส้นเชื่อม FE น้ำหนัก 80
ขั้นเจ็ด	เลือกจุดยอด H ได้เส้นเชื่อม FH น้ำหนัก 150
ขั้นสุดท้าย	เลือกจุดยอด D ได้เส้นเชื่อม ED น้ำหนัก 230

จะเห็นได้ว่ากราฟต้นไม้ที่ได้เป็นแบบเดียวกันกับกราฟต้นไม้ที่ได้โดยวิธีของครัสแคล แต่มีความแตกต่างในการเพิ่มเส้นเชื่อมใน T <u>กราฟต้นไม้ที่ได้ตามวิธีของพริม เป็นแบบทอดข้ามแต่เห็นไม่ชัดว่าเป็นแบบที่ให้ค่าต่ำสุด</u> อย่างไรก็ตามมีทฤษฎีบทที่ชี้ให้เห็นว่าวิธีของพริมจะได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 8.10</u>
ขั้นตอนวิธีของพริม เมื่อใช้กับกราฟเชื่อมโยง G จะทำให้ได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G ซึ่งมีค่าต่ำสุด

<u>พิสูจน์</u>
ให้ G เป็นกราฟแสดงน้ำหนักและมีความเชื่อมโยง ใช้ขั้นตอนวิธีของพริมกับกราฟ G ซึ่งในแต่ละขั้นตอนต้องหาเส้นที่เชื่อมโยงจุดยอดในกราฟย่อยกับจุดยอดนอกกราฟย่อย (เพราะ G มีความเชื่อมโยง จึงหาเส้นเชื่อมที่ต้องการนี้ได้) กราฟที่ได้ตามขั้นตอนวิธีของพริมเป็นกราฟต้นไม้ T เพราะจุดยอดและเส้นเชื่อมซึ่งเพิ่มในแต่ละขั้นตอนเชื่อมโยง ที่จุดยอดกับเส้นเชื่อมของ T และไม่มีขั้นตอนใดทำให้เกิดวงเวียน เพราะจุดยอดที่เพิ่มอยู่ต่างเซตกัน นอกจากนั้น T รวมทุกจุดของ G เพราะว่า T เป็นกราฟต้นไม้ซึ่งมีเส้นเชื่อม n -1 เส้น

ขั้นต่อไปเพิ่มพิสูจน์ว่า T มีน้ำหนักต่ำสุด กำหนดให้ กราฟ T_1 เป็นกราฟแบบทอดข้ามได ๆ ที่มีค่าต่ำสุด ถ้า $T = T_1$ T มีน้ำหนักต่ำสุด แต่ถ้า $T \neq T_1$ แสดงว่ามีเส้นเชื่อมใน T ซึ่งไม่มีใน T_1 ในบรรดาเส้นเชื่อมทั้งหมดที่อยู่ใน T และไม่อยู่ใน T_1 ให้ e เป็นเส้นเชื่อมเส้นแรกซึ่งเลือกเพิ่มเข้ากับ T ตามวิธีการของพริม และ V เป็นเซตของจุดยอดใน T ที่มีอยู่ก่อนเลือกเส้น e ดังนั้น จุดยอดซึ่งอยู่ที่ปลายด้านหนึ่งของเส้น e สมมุติให้เป็น v จะอยู่ใน T และให้จุดยอดอีกจุดหนึ่งสมมุติให้เป็น w ไม่อยู่ใน T เนื่องจาก T_1 เป็นกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G ดังนั้น ต้องมีวิถีใน T_1 ซึ่งเชื่อมจุด v กับจุด w และตามวิถีนี้จะต้องพบเส้นเชื่อม e' ที่โยงจุดยอดจุดหนึ่งใน V กับจุดยอดอีกจุดหนึ่งนอก V

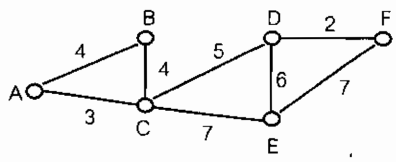
ขณะนี้ในขั้นตอนที่เพิ่ม e เข้ากับ T สามารถจะเพิ่ม e' ได้ถ้าน้ำหนัก e' น้อยกว่า e แต่เนื่องจากเป็นการเพิ่ม e และไม่ได้เพิ่ม e' จึงสรุปได้ว่าน้ำหนักของ e' มากกว่า e หรือ

$$w(e') \geq w(e)$$

ให้กราฟ T_2 เกิดจากกราฟ T_1 ด้วยการลบ e' ออกและเพิ่ม e [ดังนั้น เช่นเดียวกับ T กราฟ T_2 มีเส้นเชื่อมมากกว่า T_1 อยู่ 1 เส้น] เพราะว่า T_2 เป็นกราฟต้นไม้ การที่ e' เป็นส่วนของวิถีใน T_1 ที่เชื่อม v ถึง w และ e เชื่อม v และ w ดังนั้นการเพิ่ม e' กับ T_1 ทำให้เกิดวงเวียน เมื่อลบ e' ออกจากวงเวียน กราฟย่อยที่เหลืออยู่ยังมีความเชื่อมโยง [ความจริงแล้ว T_2 เป็นกราฟแบบทอดข้ามของ G เพราะว่าไม่มีการลบจุดยอดใดออกในการสร้าง T_2 จาก T_1 ซึ่งการอ้างเช่นนี้แสดงว่า $w(T_2) \leq w(T_1)$] ผลที่ตามมาคือ T_2 เป็นกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของ G ที่มีค่าต่ำสุดเหมือน T และมีเส้นเชื่อมมากกว่า T_1 อยู่ 1 เส้น ถ้า $T = T_2$ แสดงว่า T มีค่าต่ำสุด ถ้า $T \neq T_2$ ก็ทำตามขั้นตอนเดิมและหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด T_3 ที่มีเส้นเชื่อมร่วมกับ T มากกว่า T_1 อยู่ 1 เส้น ทำดังนี้ต่อไปตามลำดับ จะทำให้ได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด $T_1, T_2, T_3, \ldots$ ซึ่งต่างมีเส้นเชื่อมร่วมกับ T มากกว่ากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามที่สร้างไว้ก่อนคราวละ 1 เส้น และเนื่องจาก T มีจำนวนเส้นเชื่อมเป็นจำนวนจำกัด ลำดับกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามจึงมีเป็นจำนวนจำกัด ดังนั้น จะมีกราฟต้นไม้ T_k ซึ่งเหมือนกับ T แสดงให้เห็นว่า T คือกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> (การหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด)

ให้ใช้วิธีการของครัสแคลและพริมหากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด กำหนดให้เริ่มที่จุดยอด A สำหรับวิธีการของพริม



<u>วิธีทำ</u>

ตามขั้นตอนวิธีของครัสแคล จะเพิ่มเส้นเชื่อมตามลำดับ ของวิธีที่ 1 หรือ วิธีที่ 2 ดังนี้

วิธีที่ 1 (A,F) , (A,C), (A,B), (C,D), (D,E)

วิธีที่ 2 (D,F) , (A,C), (B,C), (C,D), (D,E)

ตามขั้นตอนวิธีของพริม ซึ่งกำหนดให้เริ่มที่จุดยอด A จะเพิ่มเส้นเชื่อมตามลำดับได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 (A,C), (A,B), (C,D), (D,F) , (D,E)

วิธีที่ 2 (A,C), (B,C), (C,D), (D,F) , (D,E)

จะเห็นได้ว่าตามวิธีการทั้งของครัสแคลและพริม จะได้กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด 2 กราฟ ไม่ซ้ำกัน

8.7 <u>การนับจำนวนกราฟต้นไม้</u>

การนับจำนวนกราฟต้นไม้มีส่วนช่วยในการตอบปัญหาด้านต่าง ๆ เช่น ปัญหาที่ว่าระบบการชลประทานคลองส่งน้ำเชื่อมระหว่างสถานที่ 5 แห่ง กับคลอง 4 คลอง มีเป็นจำนวนเท่าใด หรือปัญหาการหาจำนวนโมเลกุลทางเคมีสูตร $C_8 H_{18}$ ว่ามีเท่ากับเท่าใด

โดยทั่วไป ปัญหาการนับจำนวนกราฟต้นไม้ซึ่งมีอักษรกำกับจุดยอดจะง่ายกว่าปัญหาการนับจำนวนกราฟต้นไม้ซึ่งไม่มีอักษรกำกับจุดยอด

ตารางต่อไปนี้แสดงจำนวนนับของกราฟต้นไม้ทั้ง 2 แบบ ที่มีอันดับ $n \leq 10$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
กราฟต้นไม้มีอักษรกำกับ	1	1	3	16	125	1296	16807	262144	4782969	10^8
กราฟต้นไม้ไม่มีอักษรกำกับ	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106

จากตารางนี้สามารถสรุปได้ว่าสำหรับกราฟต้นไม้มีอักษรกำกับอันดับ n จะมีจำนวนกราฟทั้งหมด n^{n-2} และผลลัพธ์นี้เป็นไปตามทฤษฎีของอาร์เธอร์ เคย์เลย์ ที่พิสูจน์ไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 8.11

จำนวนของกราฟต้นไม้มีหมายเลขกำกับจุดยอดอันดับ n เท่ากับ n^{n-2}

การพิสูจน์ทฤษฎีใช้หลักการของพรูเฟอร์ (Prufer's contraction) ที่อาศัยความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 ระหว่างกราฟต้นไม้มีแบบเลขกำกับจุดยอดอันดับ n กับลำดับของจำนวน n - 2 จำนวน (เรียกว่าลำดับของพรูเฟอร์) ซึ่งสำหรับหลักการของพรูเฟอร์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

กำหนดเซตของกราฟต้นไม้มีหมายเลขกำกับจุดยอด n จุด กับเซตของลำดับในรูป $(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{n-2})$ ซึ่งในที่นี้แต่ละ b_i คือจำนวนเต็ม ในเซตของ 1,2,3,....., n (มีซ้ำกันได้) เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 จะทำตามลำดับ 3 ขั้นตอนกับกราฟต้นไม้มีหมายเลขกำกับ จุดยอด n จุด ดังนี้

ก. จากกลุ่มของจุดยอดซึ่งมีดีกรี 1 เลือกจุดยอดที่มีหมายเลขน้อยที่สุด

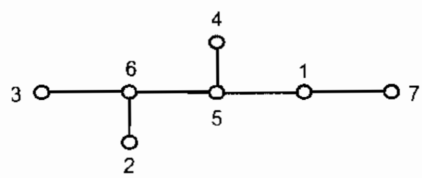
ข. เลือกจุดประชิดกับจุดยอดที่เลือกไว้ในข้อ ก. และใส่ตัวเลขในตำแหน่งแรกของลำดับ

ค. ลบจุดยอดที่เลือกในข้อ ก. และเส้นที่ประชิดกับจุดนี้ออกได้กราฟต้นไม้ที่เล็กกว่าเดิม

ง. ทำขั้นตอน ก, ข, ค ซ้ำใหม่ จนกว่าจะเหลือจุดยอด 2 จุด จะได้ลำดับของพรูเฟอร์

ตัวอย่างที่ 16

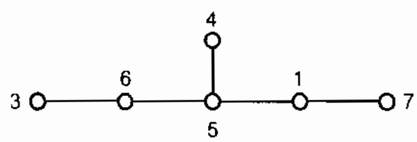
จากกราฟต้นไม้มีตัวเลขกำกับที่กำหนดให้



ก. กลุ่มจุดยอดดีกรี 1 คือ จุด 3, 2, 4 และ 7 มีจุดยอดตัวเลข 2 เล็กสุด

ข. จุดประชิดกับ 2 คือ 6 ดังนั้นตัวเลขตำแหน่งแรกในลำดับของพรูเฟอร์คือ 6

ค. ลบจุดยอดหมายเลข 2 และเส้นเชื่อม 26 ออกได้กราฟต้นไม้ที่เล็กกว่าเดิมคือ

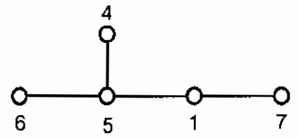


ง. ทำซ้ำขั้นตอน ก, ข, ค

ก. จุดยอดดีกรี 1 คือจุด 3, 4 และ 7 ซึ่ง 3 เป็นหมายเลขน้อยที่สุด

ข. จุดประชิดกับจุดหมายเลข 3 คือ 6 ดังนั้นตัวเลขในลำดับตัวที่สอง คือ 6

ค. ลบเส้น 36 ได้กราฟต้นไม้ คือ



ง. ทำซ้ำต่อไปจะได้ลำดับของพรูเฟอร์ คือ (6, 6, 5, 5, 1) เส้นเชื่อมที่ลบออกตามลำดับ คือ 4 5, 6 5 และ 5 1

ในทางกลับกันสามารถใช้ลำดับของพรูเฟอร์หาความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 ได้เช่นเดียวกัน โดยทำตามขั้นตอน ดังนี้

ก. เขียนจุดยอด n จุด ใส่หมายเลขกำกับตั้งแต่ 1 ถึง n และมีรายการตัวเลข จาก 1 ถึง n

ข. ดูตัวเลขที่น้อยที่สุดในรายการและเป็นตัวเลขที่ไม่อยู่ในลำดับของพรูเฟอร์ หาตัวเลขแรกสุดในลำดับของพรูเฟอร์ แล้วเพิ่มเส้นเชื่อมโยงจุดกับหมายเลข

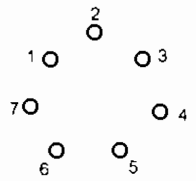
ค. ลบตัวเลขลำดับแรกในข้อ ข. ออกจากรายการและลบตัวเลขอีกตัวหนึ่งออกจากลำดับของพรูเฟอร์ จะได้รายการและลำดับซึ่งเล็กกว่าเดิม

ง. ทำขั้นตอนในข้อ ข. และ ค ซ้ำ ๆ ต่อไปจนเหลือเพียง 2 หมายเลขในรายการ และโยงจุดกับตัวเลขเหล่านี้

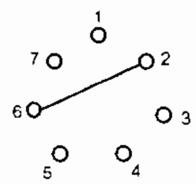
<u>ตัวอย่างที่ 17</u>

จากลำดับของพรูเฟอร์ (6, 6, 5, 5, 1)

ก. เพราะว่าลำดับมี 7 - 2 = 5 จำนวน จึงเริ่มรายการด้วย (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) และสร้างจุดยอด 1 ถึง 7 ดังรูป

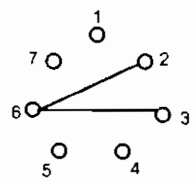


ข. จำนวนน้อยที่สุดในรายการแต่ไม่อยู่ในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 2 และจำนวนแรกสุดในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 6 ดังนั้น จึงโยงเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 กับ 6

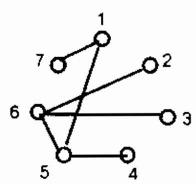


ค. ลบเลข 2 ออกจากรายการและลบเลข 6 ออกจากลำดับของพรูเฟอร์ จะได้รายการ (1, 3, 4, 6, 7) และลำดับ (6, 5, 5, 1) (กลับไปที่ขั้นตอน ข. ใหม่)

ง. จำนวนน้อยที่สุดในรายการ และไม่อยู่ในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 3 ส่วนจำนวนแรกสุดในลำดับของพรูเฟอร์ คือ 6 ดังนั้น โยงเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 3 กับ 6



จ. ลบเลข 3 ออกจากรายการ และลบเลข 6 ออกจากลำดับของพรูเฟอร์ได้รายการใหม่เป็น (1, 4, 6, 7) และลำดับของพรูเฟอร์ใหม่เป็น (5, 5, 1) ทำขั้นตอนในข้อ ข. และ ค. ซ้ำ ๆ ต่อไปจะได้เส้นเชื่อมโยงจุดยอด 4 กับ 5 เส้นเชื่อมโยงจุดยอด 6 กับ 5 และ เส้นเชื่อมโยงจุดยอด 5 กับ 1 และรายการท้ายสุดคือ (1, 7) สร้างเส้นเชื่อมโยงจุด (1, 7)



จะเห็นได้ว่ากราฟต้นไม้มีตัวเลขกำกับจุดยอดที่ได้จากลำดับของพรูเฟอร์ (6, 6, 5, 5, 1) คือ กราฟต้นไม้มีตัวเลขกำกับจุดยอดที่ทำให้ได้ลำดับของพรูเฟอร์ ซึ่งกรณีเช่นนี้จะเกิดขึ้นเป็นปกติ ถ้าเริ่มต้นด้วยกราฟต้นไม้จะได้ลำดับของพรูเฟอร์ และเมื่อเริ่มจากลำดับ ลำดับของพรูเฟอร์ จะได้กราฟต้นไม้เดิม นั่นคือ ความสัมพันธ์ แบบ 1 - 1 ที่ต้องการ

จากขั้นตอนดังกล่าวนี้จึงสามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของเคย์เลย์ โดยสรุปได้ว่า เนื่องจากมีความสัมพันธ์แบบ 1 - 1 ระหว่างกราฟต้นไม้มีอักษรกำกับจุดยอด n จุด กับ เซตของลำดับพรูเฟอร์ $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ ซึ่ง a_i คือ จำนวนเต็ม 1, 2, 3, ……,n (จำนวนนี้ซ้ำได้) และมีค่าที่เป็นไปได้อย่างแน่นอน n ค่าสำหรับแต่ละ a_i ดังนั้น จำนวนของลำดับที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ a^{n-2} ตามทฤษฎีบทของเคย์เลย์ ที่กล่าวถึงในตอนแรก

นอกจากทฤษฎีบทของเคย์เลย์ ยังมีทฤษฎีบทของเคอร์ชอฟ เกี่ยวกับการหาจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม ดังนี้

__ทฤษฎีบท 8.12__
ถ้า M เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จากเมทริกซ์ประชิดของกราฟเชื่อมโยง G ด้วยการเปลี่ยนบรรดาสมาชิกเลข 1 ทั้งหลายให้เป็น -1 และเปลี่ยนสมาชิกเลข 0 ในแนวทะแยงให้เท่ากับจำนวนดีกรีของจุดยอดที่สมนัย แล้วจะได้ว่าจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G จะเท่ากับค่าของ cofactor ใด ๆ ของ M

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีนี้จะดูได้จากหนังสือ ทฤษฎีกราฟและประยุกต์ของ J. A. Bondy และ U.S.R Monty ในที่นี้จะแสดงเฉพาะตัวอย่างของการหาจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม

__ตัวอย่างที่ 18__
กำหนดให้เมทริกซ์ประชิดของกราฟเชื่อมโยง G คือ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ตามทฤษฎีบทของเคอร์ชอฟ จะได้เมทริกซ์ M เป็น

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า cofactor ของ M_{11} คือ (กระจายโดย cofactor ของแถวที่ 1)

$$+\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 2 - 2 = 8$$

หรือ cofactor ของ M_{23} คือ (กระจายโดย cofactor ของหลักที่ 3)

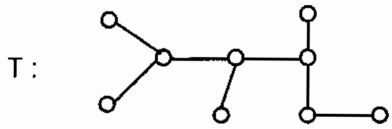
$$-\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -\left[(-1)(0) + 2(-3-1)\right] = -(-8) = 8$$

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทของเคอร์ชอฟว่าจำนวนกราฟต้นไม้แบบทอดข้ามจะเท่ากับ cofactor ใด ๆ ของ M ซึ่งในที่นี้เท่ากับ 8

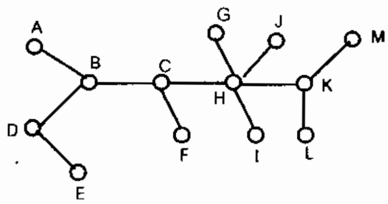
❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

แบบฝึกหัด

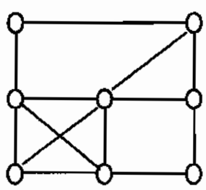
1. ให้หาและสร้างกราฟต้นไม้อันดับ 7 ทั้งหมดด้วยการเพิ่มจุดและเส้นเข้ากับกราฟต้นไม้อันดับ 6
2. กราฟต้นไม้เป็นกราฟปกติได้หรือไม่ อธิบาย
3. กราฟต้นไม้ G จะมีวิถีเพียง 1 วิถีระหว่างจุด u และ v ที่ไม่ซ้ำกัน จงยกตัวอย่างกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีวิถี 2 วิถี ระหว่างจุด u - v ที่ไม่ซ้ำกัน
4. จงพิสูจน์ว่ากราฟต้นไม้จะมีวงจรเกิดขึ้นเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม 1 เส้น
5. ให้อธิบายว่าเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม 1 เส้นในกราฟต้นไม้จะเป็นไปได้หรือไม่ที่กราฟใหม่มีวงจร 2 วงจร
6. จงแสดงให้เห็นตามทฤษฎีของกราฟต้นไม้ว่ากราฟข้างล่างนี้มีคุณสมบัติเป็นกราฟต้นไม้



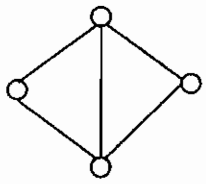
7. กราฟต้นไม้ข้างล่างนี้มีจุดตัดและสะพานที่ใดบ้าง



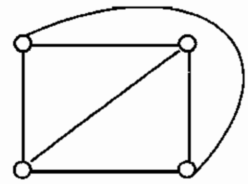
8. ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้าม 2 แบบจากกราฟเชื่อมโยงที่กำหนดให้



9. ให้หากราฟต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งหมดของกราฟต่อไปนี้



9.1

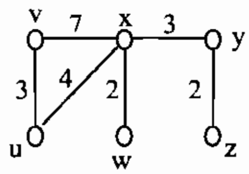


9.2

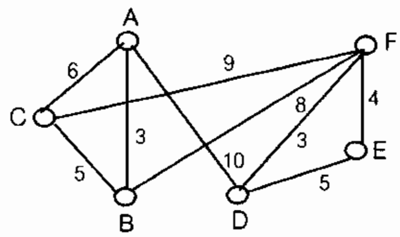
10. จากกราฟเชื่อมโยงที่กำหนดให้ จงหา

10.1 กราฟต้นไม้แบบทอดข้าม

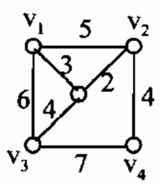
10.2 กราฟต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดตามวิธีของครัสแคล และพริม



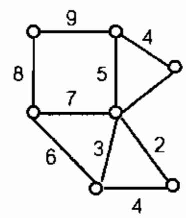
G_1



G_2

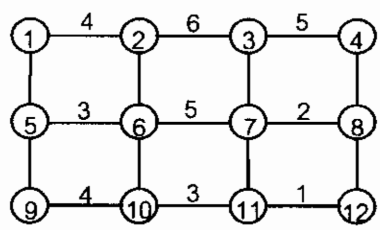


G_3



G_4

11. เพื่อส่งเสริมการท่องเที่ยวในประเทศไทย องค์การท่องเที่ยวจำเป็นต้องจัดให้มีการติดต่อสื่อสารกันได้ระหว่างสถานที่ท่องเที่ยว 12 แห่ง เพื่ออำนวยความสะดวกให้นักท่องเที่ยวชาวต่างประเทศ ค่าใช้จ่ายในการติดตั้งอุปกรณ์การสื่อสาร (คิดเป็นหมื่นบาท) มีดังนี้



ให้หาว่าองค์การท่องเที่ยวควรจะให้มีการติดตั้งอุปกรณ์การสื่อสาร ณ ที่ใดบ้าง ซึ่งทำให้สถาน ที่ทุกแห่งติดต่อถึงกันได้ และเสียค่าใช้จ่ายในการติดตั้งต่ำสุด

12. ระยะทางระหว่างเมือง A B C D และ E (คิดเป็นกิโลเมตร) มีดังนี้

	A	B	C	D	E
A	-	132	217	164	58
B	132	-	290	201	79
C	216	290	-	113	303
D	164	201	113	-	196
E	58	79	303	196	-

ถ้ารัฐบาลจำเป็นต้องสร้างทางหลวงเชื่อมโยงเมืองทั้ง 5 แห่ง แต่สภาพภูมิประเทศทำให้การสร้างทางหลวงระหว่างเมือง A กับ B เป็นไปไม่ได้ และสร้างไม่ได้ระหว่าง C กับ E จงหาว่ารัฐบาลจะสร้างทางหลวงเชื่อมโยงเมืองทั้ง 5 แห่ง ได้อย่างไร โดยให้มีระยะทางในการก่อสร้างต่ำสุด (เพื่อประหยัดงบประมาณ)

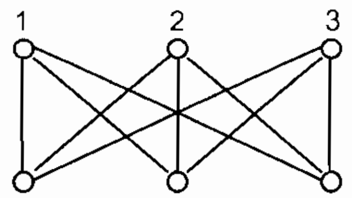
บทที่ 9

กราฟระนาบ (PLANAR GRAPHS)

9.1 นำเรื่อง

ในบทนี้จะเกี่ยวกับปัญหาว่าเมื่อกำหนดกราฟใดกราฟหนึ่งมาให้จะสามารถสร้างกราฟนั้นบนระนาบ โดยไม่ให้เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดตัดกัน

กรณีนี้ขอยกตัวอย่างปัญหาของบ้าน 3 หลังกับสาธารณูปโภค 3 สิ่ง เช่น น้ำประปา ไฟฟ้า และแก๊ส



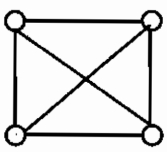
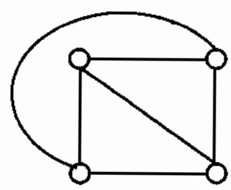
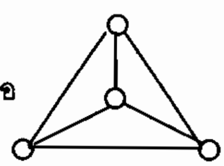
จะเห็นได้ว่าสำหรับปัญหานี้คือ จะสามารถเขียนกราฟสองส่วนแบบสมบูรณ์ (Complete bipartite graph) $K_{3,3}$ ในแบบที่เส้นเชื่อมไม่ตัดผ่านกันได้หรือไม่ ซึ่งในภาษาของทฤษฎีกราฟ คือ การตอบปัญหาว่า กราฟ $K_{3,3}$ เป็นกราฟบนระนาบหรือไม่

9.2 กราฟระนาบ

บทนิยาม 9.1.1
กราฟ G เรียกว่า กราฟระนาบ ถ้าเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดใน G ไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดผ่านกัน

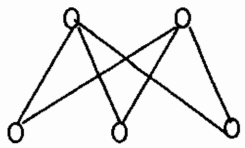
ตัวอย่างที่ 1

กราฟ k_4

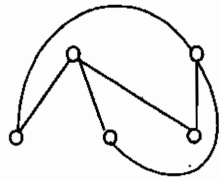

หรือ

หรือ


เป็นกราฟระนาบ เพราะสามารถสร้างให้เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดไม่ตัดผ่านกันได้

ในทำนองเดียวกัน กราฟสองส่วน $K_{2,3}$

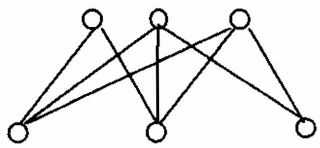


หรือ

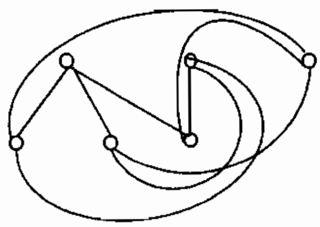


เป็นกราฟระนาบ

แต่กราฟสองส่วน $K_{3,3}$



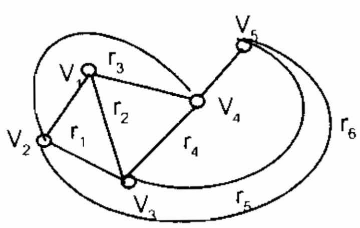
ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะไม่สามารถสร้างเป็นกราฟซึ่งเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดไม่ตัดผ่านกัน (ดังรูป)



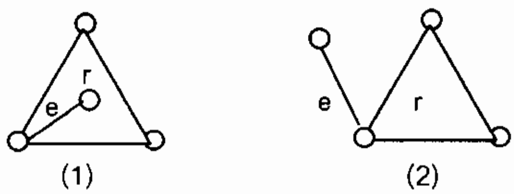
กราฟระนาบแบ่งระนาบออกเป็นเขตเชื่อมโยงต่าง ๆ เรียกว่า เขตภายใน และเขตภายนอกซึ่งจะมีอยู่ 1 เขตทุกเขตจะถูกกำหนดด้วยเส้นขอบเขต

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u>

กราฟต่อไปนี้

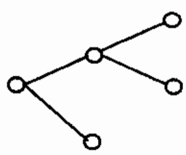


แบ่งระนาบออกเป็น 6 เขต เขต r_6 เป็นเขตภายนอกเขต r_2 ประกอบด้วยเส้นขอบเขต $v_1 v_4$, $v_1 v_3$ และ $v_3 v_4$ เขต r_6 มีเส้นขอบเขต คือ $v_2 v_4$, $v_4 v_5$ และ $v_5 v_2$ เนื่องจากการกำหนดว่าเส้นต้องเป็นขอบเขตของเขตบางเขต ดังนั้น



เส้น e ในรูป (1) เป็นส่วนหนึ่งของเส้นขอบเขตของ r แต่เส้น e ในรูป (2) เป็นส่วนหนึ่งของเขตภายนอก r

สำหรับกราฟต้นไม้

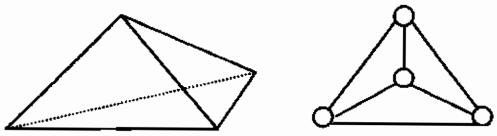


จะมีเพียง 1 เขตในระนาบ คือ เขตภายนอก และเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟต้นไม้ เป็นเส้นขอบเขตของเขตภายนอกนี้

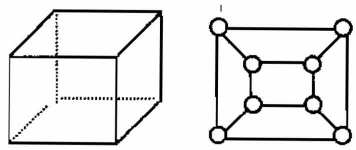
9.3 <u>กราฟระนาบของออยเลอร์</u>

ลีออนฮาร์ด ออยเลอร์ เป็นบุคคลแรกที่ศึกษาเรื่องกราฟระนาบ เพราะกราฟระนาบเกี่ยวข้องกับรูปทรงหลายหน้า รูปทรงหลายหน้าปกติแบบนูน เป็นรูปทรงเรขาคณิตซึ่งหน้าทุกหน้ามีความสมภาค (Congruence) รูปทรงหลายหน้ามี 5 แบบ คือ ลูกบาศก์ รูปทรงสี่หน้า รูปทรงแปดหน้า รูปทรงสิบสองหน้าและรูปทรงยี่สิบหน้า รูปทรงเหล่านี้มักนิยมเรียกกันว่า รูปทรงต้นแบบเพลโต เพราะว่าเพลโตจัดให้รูปทรงเหล่านี้เป็นสัญลักษณ์แทนโลก ไฟ อากาศ น้ำ และจักรวาล การหากราฟระนาบจากรูปทรงหลายหน้ารูปใดรูปหนึ่งด้วยการจินตนาการให้หน้า

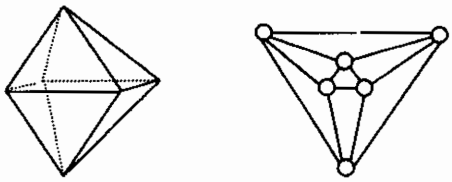
ล่างสุดของรูปยืดออกจนรูปทรงหลายหน้าแบนราบ ดังกราฟระนาบที่ได้จากการยืดหน้าด้านล่างสุดของรูปทรงสี่หน้า ลูกบาศก์ และรูปทรงแปดหน้าตามลำดับ ดังนี้



รูปทรงสี่หน้า



ลูกบาศก์



รูปทรงแปดหน้า

ลีออนฮาร์ด ออยเลอร์ ค้นพบความสัมพันธ์อันน่าสนใจระหว่างจุดยอด เส้นเชื่อม และเขต ของรูปทรงหลายหน้าแบบนูน (รูปหลายเหลี่ยมเป็นแบบนูน ถ้าระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่ไม่เป็นจุดประชิดกันของรูปหลายเหลี่ยม มีเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดนั้นที่โยงถึงกันโดยไม่มีส่วนใดของเส้นเชื่อมอยู่นอกรูปหลายเหลี่ยม) ความสัมพันธ์ดังกล่าว คือ

<u>ทฤษฎีบท 9.1</u>

ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงอันดับ p ขนาด q และ r เขต แล้ว $p - g + r = 2$

<u>พิสูจน์</u>

ใช้การพิสูจน์แบบคณิตศาสตร์อุปนัยกับขนาดของกราฟ ถ้า $q = 0$ จะเห็นได้ว่า $p = r = 1$ (เฉพาะ G เชื่อมโยง) ดังนั้น $p - q + r = 1 - 0 + 1 = 2$ เป็นจริงตามทฤษฎีตามวิธีการกำหนดให้ความสัมพันธ์เป็นจริงสำหรับกราฟเชื่อมโยงซึ่งมีขนาด $q - 1$ โดยที่ $q \geq 1$ จะต้องแสดงให้เห็นว่า $p - q + r = 2$ ถ้า G ไม่มีวงเวียน แสดงว่า G เป็นกราฟต้นไม้ และ $q = p - 1$ มี $r = 1$

ดังนั้น $p - q + r = p - (p - 1) + 1 = 2$

ถ้า G มีวงเวียน C ให้ e เป็นเส้นในวงเวียน C จะเห็นได้ว่ากราฟ G - e ซึ่งเป็นกราฟระนาบและเชื่อมโยงจะมีเส้นเชื่อมน้อยกว่า G อยู่ 1 เส้น และมีเขตน้อยกว่าเขตของ G อยู่ 1 เขต แต่จำนวนจุดยอดเท่ากัน ดังนั้น ตามข้อสมมุติฐานของการพิสูจน์แบบอุปนัย

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$$

หรือ

$$p - q + r = 2$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง ถ้า G เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

<u>บทตั้ง 9.1</u>

กราฟสองส่วน $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบ

<u>พิสูจน์</u>

(ใช้การพิสูจน์แบบให้ข้อขัดแย้ง)

กราฟ $K_{3,3}$ มีจุดยอด 6 จุด และเส้นเชื่อม 9 เส้น ถ้า $K_{3,3}$ เป็นกราฟระนาบจะต้องเขียนเป็นกราฟที่มีเขต r เขต และมีจำนวนเขตตามความสัมพันธ์

$$p - q + r = 2$$

$$6 - 9 + r = 2 \text{ นั่นคือ } r = 5$$

ถ้านับจำนวนเส้นขอบเขตทั้งหมดของกราฟ $K_{3,3}$ ได้ N เส้น เนื่องจากเขตแต่ละเขตของ $K_{3,3}$ ใช้เส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด 4 เส้น ดังนั้น

$$N \geq R = 20$$

แต่ในการนับจำนวนรวมของ N เส้นเชื่อมแต่ละเส้นถูกนับอย่างมากที่สุดเส้นละ 2 ครั้ง ดังนั้น

$$N \leq 2q = 18$$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นกราฟ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบ

<u>ข้อสังเกต</u>

กราฟที่มีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนมาก จะไม่เป็นกราฟบนระนาบ เพราะจะหลีกเลี่ยงการตัดกันของเส้นเชื่อมไม่ได้ ทฤษฎีต่อไปนี้จะช่วยให้เห็นชัดเจนมากขึ้น

ทฤษฎีบท 9.2

ถ้า G เป็นกราฟระนาบอันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ และขนาด q แล้ว $3p - 6 \geq q$

พิสูจน์

ถ้า $p = 3$ แล้ว $q \leq 3$

ดังนั้นทฤษฎีเป็นจริง ถ้า $p > 3$ และ $q \geq 3$ (ถ้า $q < 3$ ทฤษฎีบทเป็นจริง)

ให้ G มีเขต r เขต และจำนวนเส้นขอบเขตทั้งหมดเท่ากับ N เพราะว่า $N \leq 2q$ และเนื่องจากแต่ละเขตของ G ต้องใช้เส้นเชื่อมอย่างน้อยที่สุด 3 เส้น

ดังนั้น $N \geq 3r$ แสดงว่า $3r \leq 2q$

แต่ $p - q + r = 2$ เพราะฉะนั้น $3p - 3q + 3r = 6$ และ $3p - 3q + 2q \geq 6$ $(2q \geq 3r)$

$3p - q \geq 6$ นั่นคือ $3p - 6 \geq q$

บทตั้ง 9.2

กราฟระนาบใด ๆ จะมีจุดยอดอย่างน้อยที่สุด 1 จุด ที่มีดีกรี ≤ 5

พิสูจน์

สมมุติว่า $\deg v_i \geq 6$ สำหรับจุด v_i ใด ๆ เพราะว่า $\sum \deg v_i = 2g$ ดังนั้น $2g \geq 6p$ หรือ $q \geq 3p \geq 3p - 6$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎี เพราะฉะนั้น $\deg v_i \leq 5$

บทตั้ง 9.3

กราฟ K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบ

พิสูจน์

เพราะว่ากราฟ K_5 มี $p = 5$ และ $q = 10$ ดังนั้น $q = 10 \geq 3p - 6 = 15 - 6 = 9$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีกราฟระนาบ $3p - 6 \geq q$ แสดงว่า K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบ

9.4 กราฟแผนที่และเขตของกราฟ (MAPS AND REGIONS)

บทนิยาม 9.4.1

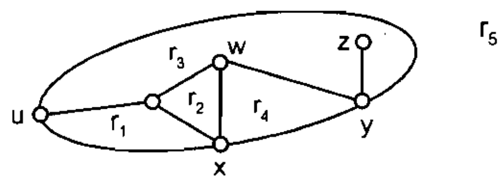
กราฟแผนที่ คือ กราฟระนาบแบบเฉพาะที่เป็นตัวแทนของพหุกราฟระนาบจำนวนนับได้ และกราฟแบบที่มีความเชื่อมโยงถ้าพหุกราฟนั้นเชื่อมโยง

บทนิยาม 9.2.1

ดีกรีของเขต r deg(r) คือจำนวนของเส้นเชื่อมที่ปิดล้อมเขต r กับเส้นเชื่อมที่ไม่เป็นวงเวียนและวิถีของเขตจะนับเส้นเชื่อมนั้น 2 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 3

จากกราฟที่กำหนดให้



จะเห็นได้ว่าเขตทั้งหมดเป็นวงเวียน ยกเว้นเขต r_3 ซึ่งเมื่อคำนึงถึงวิถีของเขต r_3 เริ่มจาก w ทวนเข็มนาฬิกาจะได้วิถีปิด w, y, z, y, u, v, w และเป็นวิถีที่นับเส้นเชื่อม yz จำนวน 2 ครั้ง

สำหรับดีกรีของเขตในที่นี้

$\deg r_1 = \deg r_2 = \deg r_4 = 3$

$\deg r_3 = 6$

$\deg r_5 = 3$

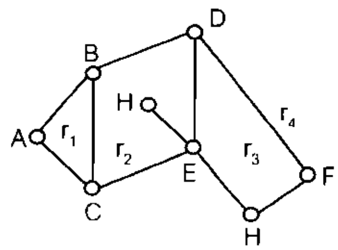
ทฤษฎีบท 9.3
ผลรวมของดีกรีของเขตของกราฟแผนที่ G เท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมใน G

พิสูจน์

เพราะว่าเส้นเชื่อม e แต่ละเส้นในกราฟแผนที่ G เป็นเส้นขอบเขตของเขต 2 เขต หรืออยู่ในเขต ดังนั้น เส้นเชื่อม e เมื่อคำนึงถึงวิถีของเขตจะถูกนับเป็นจำนวน 2 ครั้ง ด้วยเหตุนี้เส้นเชื่อมทุกเส้นในแต่ละเขตจะถูกนับ 2 ครั้ง เป็นผลให้ผลรวมของดีกรีของเขตของกราฟ G เท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้นเชื่อมใน G

ตัวอย่างที่ 4

จากกราฟแผนที่ G ซึ่งกำหนดให้



จะเห็นได้ว่า	เขต r_1 เป็นวงเวียน	A,B,C,A	มีดีกรี 3
	เขต r_2 เป็นวิถีปิด	B,D,E,H,E,C,B	มีดีกรี 6
	เขต r_3 เป็นวงเวียน	D,F,H,E,D	มีดีกรี 4
	เขต r_4 เป็นวงเวียน	A,B,D,F,H,E,C,A	มีดีกรี 7

และผลรวมดีกรี คือ $3 + 6 + 4 + 7 = 20$

กราฟแผนที่ G มีจำนวนเส้น $q = 10$

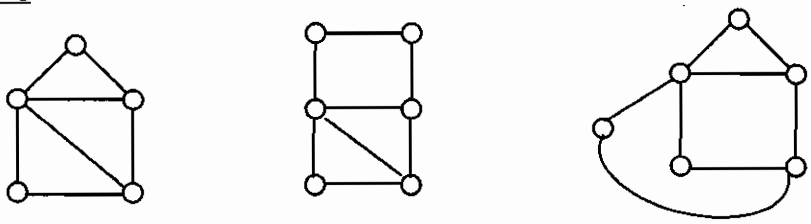
แสดงให้เห็นผลลัพธ์ตามทฤษฎีว่าผลรวมดีกรีของเขต เท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้น

กราฟ $K_{3,3}$ และ K_5 มีบทบาทสำคัญต่อทฤษฎีกราฟในเรื่อง กราฟบนระนาบและจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

<u>บทนิยาม 9.4.2</u>

กราฟ 2 กราฟมีความสมานสัณฐาน (homeomarphism) ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ แต่ละกราฟเกิดจากการเพิ่มจุดยอดดีกรีสองเข้าที่เส้นเชื่อมของกราฟเดียวกัน

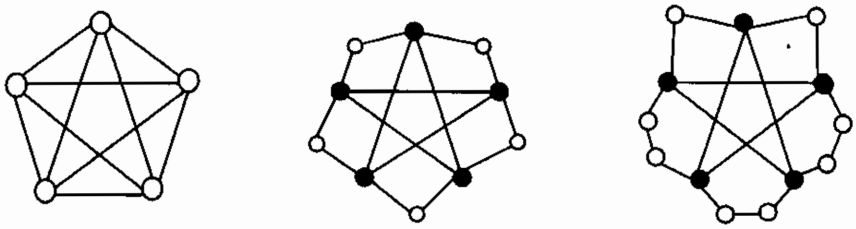
<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



G G_1 G_2

กราฟ G_1 และ G_2 มีความสมานสัณฐาน เพราะต่างเป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ G ด้วยการเพิ่ม จุดยอด 1 จุด เข้ากับเส้นเชื่อมของ G

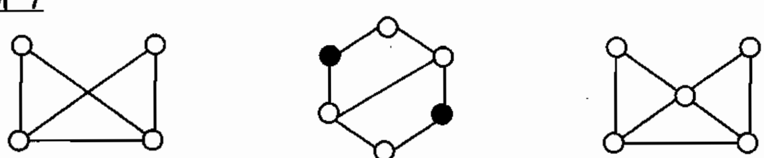
<u>ตัวอย่างที่ 6</u>



K_5 G_3 G_4

กราฟ G_3 และ G_4 มีความสมานสัณฐาน เพราะต่างเป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ K_5 ด้วยการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 เข้ากับเส้นเชื่อมของ K_5 (จุดทึบเป็นจุดยอดของ K_5)

<u>ตัวอย่างที่ 7</u>



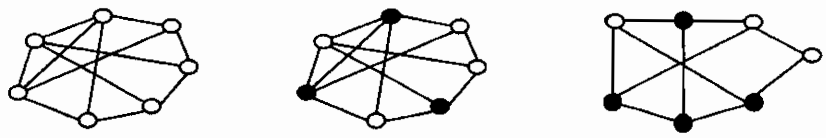
G_1 G_2 G_3

กราฟ G_1 และ G_2 มีความสมานสัณฐานเพราะ G_2 เกิดจาก G_1 ด้วยการเพิ่มจุดยอด 2 จุด (จุดทึบ) เข้ากับเส้นของ G_1 แต่ G_1 ไม่มีความสมานสัณฐานกับ G_3 เพราะตามบทนิยามการเพิ่มจุดยอดดีกรีสองกับเส้นเชื่อมไม่รวมการเพิ่มจุดยอดตรงที่เส้นตัดกัน

ทฤษฎีต่อไปนี้แสดงการบอกลักษณะของกราฟระนาบด้วยวิธีการซึ่งค่อนข้างง่ายและการพิสูจน์ทางหนึ่งเป็นแบบตรงไปตรงมา แต่การพิสูจน์ในทางกลับกันค่อนข้างซับซ้อนเกินไป จึงไม่แสดงการพิสูจน์ในระดับนี้

<u>ทฤษฎีบท 9.4</u>
กราฟ G เป็นกราฟระนาบก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ G ไม่มีกราฟย่อยซึ่งมีความสมานสัณฐานกับกราฟ K_5 หรือ $K_{3,3}$

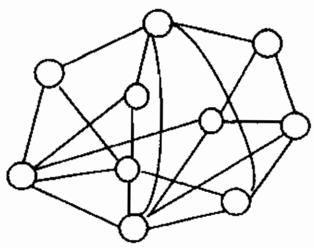
<u>ตัวอย่างที่ 8</u>

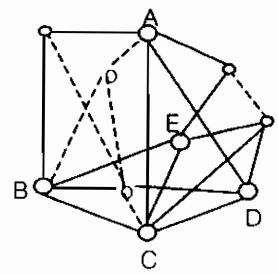


G S

กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะเมื่อลบเส้นเชื่อมออก 2 เส้น จะได้กราฟ S ซึ่งเป็นกราฟย่อยของ $K_{3,3}$ (จุดโปร่งและจุดทึบแสดงเซตของจุดในกราฟ 2 ส่วน)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>





G S

กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ เพราะกราฟย่อย S ของ G มีความสมานสัณฐานกับกราฟสมบูรณ์ K_5 เช่น จุดยอด A ประชิดกับจุดยอด C กับ D และจุดยอด B กับ E โดยไม่รวมจุดยอดดีกรี 2

9.5 <u>การตรวจสอบกราฟระนาบ</u>

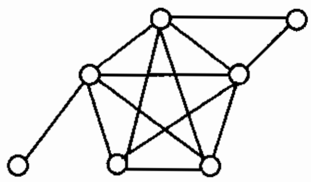
ในการตรวจเพื่อหาว่ากราฟเชื่อมโยงไม่เป็นกราฟระนาบ จะใช้ความสัมพันธ์ $q \leq 3p - 6$ หรือ $q \leq 2p - 4$ เช่นที่ใช้ในการพิสูจน์ว่ากราฟ K_5 และ $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟระนาบเพราะความสัมพันธ์ไม่สอดคล้องกับอสมการ อย่างไรก็ตาม มีกราฟจำนวนมากซึ่งมีความสัมพันธ์สอดคล้องกับอสมการ แต่ไม่เป็นกราฟระนาบ จึงต้องหาวิธีการอื่นเพื่อตรวจสอบความเป็นกราฟระนาบ

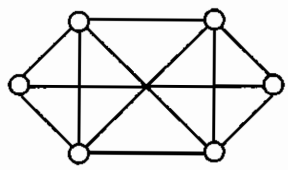
<u>ข้อสังเกตในการตรวจสอบ</u>

ก. กราฟทั้งหมดไม่จำต้องเป็นกราฟระนาบ เช่น กราฟ $K_{3,3}$ และกราฟ K_5 ไม่เป็นกราฟระนาบ

ข. ถ้ากราฟ G เป็นกราฟระนาบ กราฟย่อยของ G ทุกกราฟเป็นกราฟระนาบ หรือ

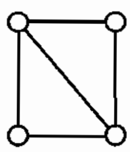
ค. ถ้ากราฟ G มีกราฟย่อยที่ไม่เป็นกราฟระนาบ กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ เช่น กราฟต่อไปนี้ไม่เป็นกราฟระนาบเพราะมีกราฟย่อยแบบ $K_{3,3}$ และ K_5 ซึ่งไม่เป็นกราฟระนาบ



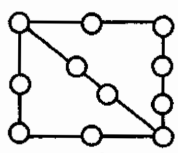


เนื่องจากการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 เข้ากับเส้นเชื่อมในกราฟ Gไม่มีผลกระทบต่อการเป็นกราฟระนาบหรือไม่เป็นกราฟระนาบของ G

ดังเช่น



G



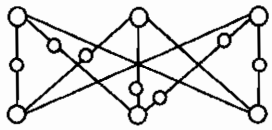
กราฟที่ได้จากการเติมจุดยอดดีกรี 2 ใน G

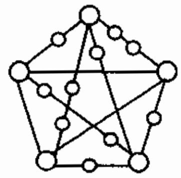
จึงมีข้อสังเกตอีก 2 ประการ คือ

ง. ถ้า G เป็นกราฟระนาบ กราฟที่ได้จาก G ด้วยการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 จะเป็นกราฟระนาบด้วยหรือ

จ. ถ้ากราฟที่ได้จากการเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ในกราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบ กราฟ G ไม่เป็นกราฟระนาบด้วย

ดังเช่น กราฟต่อไปนี้



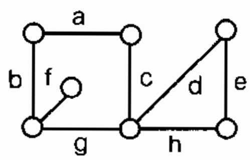


ซึ่งกราฟแรกเป็นกราฟเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ของ $K_{3,3}$ และกราฟต่อมาเป็นกราฟเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ของ K_5

ดังนั้น จากข้อสังเกตข้อ ค. และ จ. จึงกล่าวได้ว่า ถ้ากราฟ G มีกราฟย่อยซึ่งเป็นแบบเพิ่มจุดยอดดีกรี 2 ของ $K_{3,3}$ และ K_5 แล้ว กราฟ G จะไม่เป็นกราฟระนาบ เหตุผลสำคัญที่เกี่ยวข้องกับข้อสังเกตในเรื่องกราฟทั้ง 2 ชนิดนี้ คือ กราฟที่ไม่เป็นกราฟระนาบทั้งหมดจะสามารถหาได้ตามวิธีการที่ได้อธิบายมาแล้ว กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ กราฟที่ไม่เป็นกราฟระนาบทุกกราฟจะมีกราฟย่อยในแผนที่เป็นลักษณะของกราฟ $K_{3,3}$ หรือ K_5 ผลลัพธ์ทั้งหมดข้างต้นนี้เกิดจากทฤษฎีของนักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ เค. คูราโทวสกี ในปี พ.ศ. 2473

แบบฝึกหัด

1. จากกราฟ G ที่กำหนดให้



   1.1 กราฟ G มีจำนวนเขตเท่าใด

   1.2 ให้หาเส้นเชื่อมที่เป็นขอบเขตของแต่ละเขต

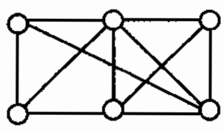
   1.3 ให้หาเขตภายนอก

2. จากทฤษฎีของออยเลอร์ซึ่งกำหนดว่ากราฟระนาบเชื่อมโยงอันดับ p ขนาด q และ r เขต จะมี $p - q + r = 2$ จงแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีนี้ไม่จริงถ้าตัดคำว่าเชื่อมโยง ออก

3. จากกราฟที่กำหนดให้ในข้อ 1 ให้หาจำนวนรวมทั้งหมด N ของเส้นขอบเขต และจงแสดงให้เห็นว่า $N \leq 2q$ และให้ยกตัวอย่างเส้นขอบเขตซึ่งถูกนับเพียง 1 ครั้ง

4. ให้อธิบายว่าเพราะเหตุใด วงเวียนใด ๆ 2 วง จึงมีความสมานสัณฐาน

5. จากกราฟต่อไปนี้



   5.1 จงแสดงให้เห็นว่ากราฟนี้เป็นกราฟระนาบ

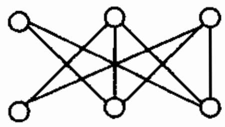
   5.2 ให้หาเขตของกราฟ กำหนดชื่อ และหาเส้นขอบเขตของแต่ละเขต

   5.3 จงแสดงให้เห็นว่ากราฟนี้มีคุณสมบัติ

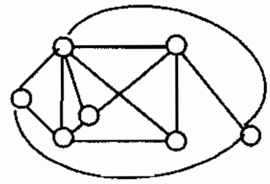
   ก. $p - q + r = 2$, $N \leq 2q$ (N คือจำนวนรวมทั้งหมดของเส้นเชื่อม)

   ข. $q \leq 3p + 6$

6. ให้อธิบายว่ากราฟต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟระนาบ ให้เขียนในรูปของกราฟระนาบและกราฟระนาบเส้นตรง หรือเป็นกราฟที่สมานสัณฐานกับกราฟ $K_{3,3}$ หรือ K_5



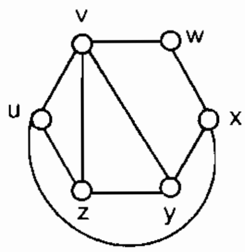
(ก)



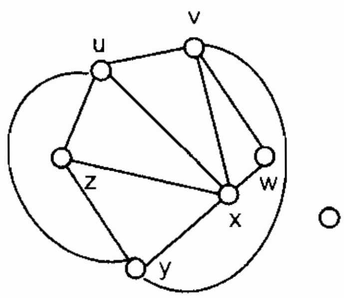
(ข)

7. ให้ยกตัวอย่างกราฟระนาบซึ่งเชื่อมโยงที่มีความสัมพันธ์ $q = 3p - 6$
8. กราฟ K_n เป็นกราฟระนาบเมื่อ n มีค่าเท่าใด
9. จากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ในกราฟระนาบ $p - q + r = 2$ เป็นจริง

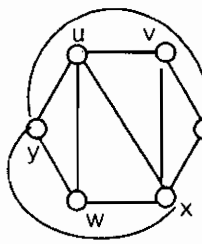
9.1



9.2



9.3



10. ถ้า G เป็นกราฟระนาบเชื่อมโยงซึ่งมีจุดยอด $p \geq 3$ และเส้นเชื่อม q และความยาวของวงเวียนในกราฟซึ่งสั้นที่สุดเท่ากับ 5 จงพิสูจน์ว่า $m \leq \frac{5}{3}(n-2)$

บทที่ 10
การให้สีกราฟ

10.1 นำเรื่อง

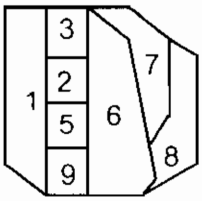
ในพุทธศตวรรษที่ 25 มีพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ เรื่องหนึ่งที่น่าสนใจมาก คือเรื่องของการกำหนดสีกราฟ หรือทฤษฎีการให้สี 4 สีในกราฟ เป็นปัญหาซึ่งทำความเข้าใจได้ง่าย แต่ไม่มีใครสามารถแก้ปัญหาได้ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2395 ซึ่งเป็นปีที่นักศึกษาชาวไอร์แลนด์ชื่อฟรานซิส คูทรี ได้ค้นพบว่า แผนที่ประเทศอังกฤษใช้สีระบายเพียง 4 สี ภายใต้เงื่อนไขว่าแต่ละเมืองใช้สี 1 สี และเมืองที่มีขอบเขตติดกันต้องให้สีต่างกัน คูทรีจึงเกิดความคิดว่าแผนที่ประเทศต่าง ๆ ในโลกนี้สามารถจะใช้สีระบายเพียง 4 สีได้หรือไม่ภายใต้เงื่อนไขว่าประเทศที่มีพรมแดนติดกันต้องใช้สีต่างกัน คูทรีเสนอปัญหานี้ให้ศาสตราจารย์ออกุสตุส เดอ มอร์แกน นักคณิตศาสตร์ผู้มีชื่อเสียงคนหนึ่งในขณะนั้นซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าในแผนที่โลกประเทศต่างๆ จำนวน 5 ประเทศ จะไม่มีประเทศหนึ่งประเทศใด ที่มีพรมแดนติดกับอีก 4 ประเทศ การพิสูจน์นี้แม้จะสนับสนุนข้อคาดคะเนของคูทรีแต่ไม่ได้แก้ปัญหาที่นำเสนอไว้

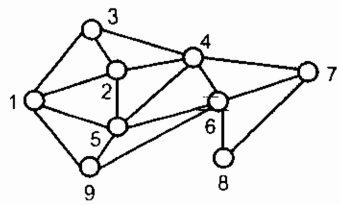
อันที่จริงก็รู้กันมานานแล้วว่าการระบายสีแผนที่ประเทศต่าง ๆ ใช้สีเพียง 5 สี แต่นับเป็นเวลานานมากว่า 100 ปี ที่ไม่มีใครจะสามารถพิสูจน์ได้ว่าใช้สีระบายเพียง 4 สีก็พอ จนถึง พ.ศ. 2422 วารสารคณิตศาสตร์ ซึ่งมีชื่อเสียงในอเมริกา ชื่อ American Journal of Mathematics ได้ลงผลงานการพิสูจน์เรื่องกราฟ 4 สี ของอัลเฟรด บี เคมป์ ทนายความชาวลอนดอน แต่ 11 ปีต่อมาก็มีผู้ค้นพบว่า ผลการพิสูจน์มีข้อผิดพลาดอันสำคัญ ดังที่เปอร์ซี เฮย์วูด ชี้ว่าข้อโต้แย้งของเคมป์เป็นจริงในกรณีใช้ 5 สี แต่ถ้าใช้ 4 สี ข้ออ้างใช้ไม่ได้ ต่อมาใน ปีพ.ศ. 2519 ศาสตราจารย์เคนเนธ แอปเปล ร่วมกับศาสตราจารย์ วุล์ฟแกง ฮาเกน พิสูจน์ทฤษฎีการใช้สีเพียง 4 สีว่าเป็นจริงและแสดงผลงานในวารสารคณิตศาสตร์แห่งอิลลินอยส์ และมีความยาวถึง 140 หน้า การพิสูจน์ชี้ให้เห็นว่ากราฟระนาบใด ๆ จะต้องมีกราฟย่อยบางชนิดอยู่ด้วย และเมื่อลบกราฟย่อยนี้ออกไปกราฟที่ลดรูปนี้จะใช้สีระบายเพียง 4 สี แอปเปล กับ ฮาเกน ใช้เวลาของเครื่องคอมพิวเตอร์ 1,200 ชั่วโมง วิเคราะห์กราฟจำนวนเกือบ 2,000 กราฟ และแยกกรณีศึกษากราฟต่าง ๆ เป็นจำนวนนับมาก

กว่าสิบพันล้านกราฟ การวิเคราะห์สามารถขยายผลถึงการใช้สี 4 สีในกราฟย่อย และทำให้ได้ทฤษฎีว่ากราฟระนาบใด ๆ จะใช้สีเพียง 4 สี นั่นคือ การระบายสีแผนที่บนระนาบใช้ 4 สีได้

10.2 การให้สีกราฟ

จุดมุ่งหมายในหัวข้อนี้คือ การแสดงวิธีที่ทฤษฎีกราฟสามารถใช้แก้ปัญหาการกำหนดจำนวนสีและพิสูจน์ให้เห็นว่าการระบายสีแผนที่ใด ๆ จะใช้สีไม่เกิน 5 สี





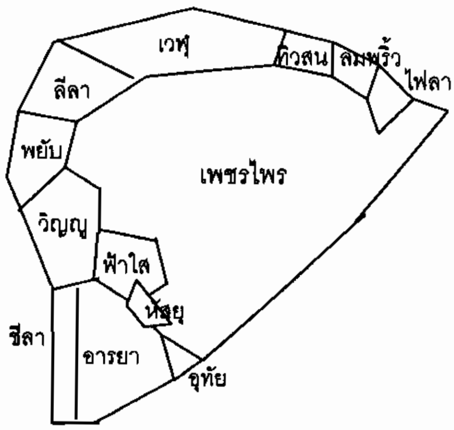
ในตอนแรกนี้ขอให้สังเกตว่าในแผนที่ใด ๆ จะมีกราฟระนาบซึ่งเป็นแบบที่เรียกว่า <u>กราฟคู่กัน</u> (dual graph) ที่มีจุดยอดแทนประเทศ และเส้นเชื่อมแทนพรมแดนระหว่างประเทศที่ติดกัน ดังเช่นแผนที่ข้างบนมีประเทศ 9 ประเทศ ดังนั้นในกราฟคู่กันจะมีจุดยอด 9 จุด และเนื่องจากประเทศที่ 5 และประเทศที่ 6 มีพรมแดนติดกัน ดังนั้น ในกราฟคู่กันจุดยอดที่ 5 กับจุดยอดที่ 6 จะมีเส้นเชื่อมกัน จุดสำคัญในการระบายสีแผนที่หรือการให้สีกราฟ คือ ประเทศที่มีพรมแดนติดกันหรือจุดยอดที่ประชิดกันต้องให้สีต่างกัน ดังนั้น ในตัวอย่างแผนที่ที่กำหนดให้และกราฟคู่กันสามารถใช้สีได้ดังนี้

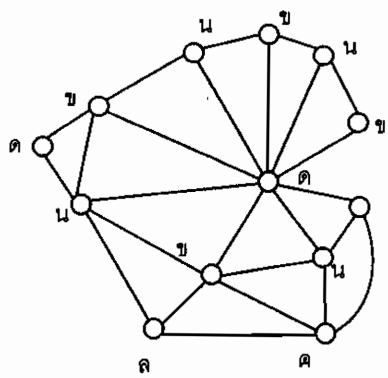
1 สีแดง	2 สีน้ำเงิน
3 สีเขียว	4 สีแดง
5 สีเขียว	6 สีน้ำเงิน
7 สีเขียว	8 สีแดง
9 สีเหลือง	

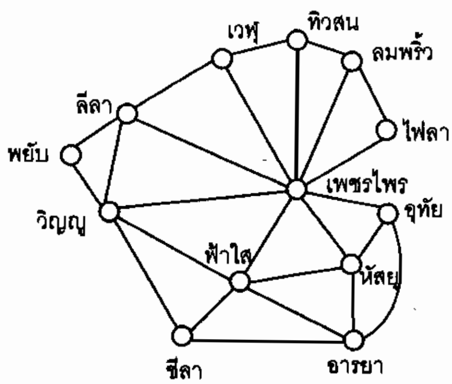
บทนิยาม 10.2.1
การให้สีกราฟ G หมายถึงการกำหนดสีให้แก่จุดยอดในกราฟ G จำนวน 1 สีต่อ 1 จุด และ 2 จุดที่ประชิดกันต้องให้สีต่างกัน

ตัวอย่างที่ 1

แสดงวิธีการเขียนกราฟคู่กัน และการให้สีกราฟของแผนที่ทวีป Atlantis

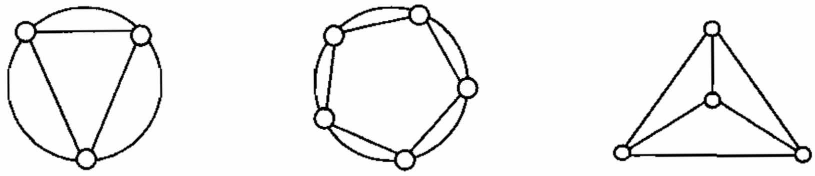






จะเห็นได้ว่าบริเวณทั้ง 13 แห่ง ในทวีปแอตแลนติส เขียนเป็นกราฟคู่กันได้จุดยอด 13 จุด และจุดประชิด หรือบริเวณที่มีเขตติดต่อกันจะใช้สีต่างกัน สีที่ใช้ทั้งหมด คือ สีเขียว (ข) สีเหลือง (ล) สีแดง (ด) และสีน้ำเงิน (น) เป็นจำนวน 4 สี

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้แสดงวิธีการเขียนกราฟคู่กันจากกราฟที่กำหนดให้ ต่อไปนี้

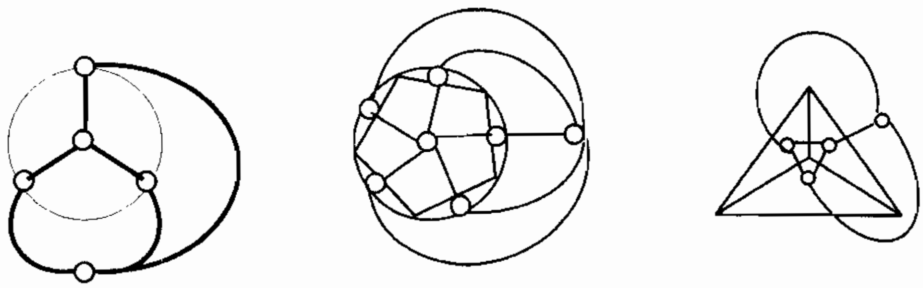


(1) (2) (3)

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นแรก กำหนดจุดยอด 1 จุดสำหรับ 1 เขตของกราฟที่กำหนดให้

ขั้นสอง ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุด ซึ่งเกิดจากเขต 2 เขต ที่มีเส้นเชื่อมร่วมกันจะได้กราฟคู่กัน ดังนี้



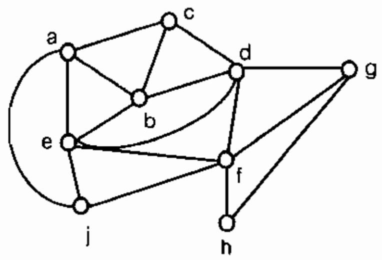
<u>ข้อสังเกต</u> กราฟที่กำหนดให้และกราฟคู่กันต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากัน นอกจากนั้น จำนวนจุดยอดในกราฟคู่กันต้องเท่ากับจำนวนเขตของกราฟที่กำหนดให้

การให้สีกราฟสามารถให้สีต่าง ๆ กันที่แต่ละจุดยอด แต่กราฟส่วนมากจะมีจำนวนสีที่ใช้น้อยกว่าจำนวนจุดยอด จึงมีคำถามว่าจำนวนสีที่ใช้ให้น้อยที่สุดตามความจำเป็นเท่ากับเท่าใด

บทนิยาม 10.2.2

จำนวนสีของกราฟ G (Chromatic number) คือจำนวนสีซึ่งน้อยที่สุดที่ใช้ในการให้สีกราฟ G และใช้สัญลักษณ์ χ (G)

ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟ G ที่กำหนดให้



จะเห็นได้ว่าจุดยอด a, b, c มีเส้นเชื่อมถึงกันเป็นรูปสามเหลี่ยมดังนั้น จะต้องให้สีแตกต่างกัน 3 สี เช่นให้เป็นสีแดง น้ำเงิน และเขียว ตามลำดับ จากนั้น ใช้สีแดงกับจุด d สีเขียวกับจุด e และสีฟ้าใช้กับจุด f และเพราะว่าจุด j ประชิดกับจุด a, e, f ซึ่งมีสีแดง เขียว และน้ำเงิน ดังนั้น จึงจำเป็นต้องให้สีต่างจากสีทั้งสามที่ใช้แล้ว นั่นคือ กราฟ G ในที่นี้มี χ (G) $\leq$ 4 = 4

ทฤษฎีบท 10.1

ถ้า $\triangle$ (G) เป็นดีกรีสูงสุดของจุดยอดในกราฟ G แล้ว χ (G) $\leq 1 + \Delta$ (G)

พิสูจน์ (ใช้คณิตศาสตร์อุปมัย)

ให้ V เป็นจำนวนจุดยอดใน G ถ้า V = 1 จะมี Δ (G) = 0 ดังนั้น χ (G) $\leq 1 + \Delta$ (G) ให้ k เป็นจำนวนเต็ม และ k $\geq$ 1 ตามหลักการของคณิตศาสตร์อุปนัย ให้ χ (G) $\leq 1 + \Delta$ (G) เป็นจริง

สำหรับ $V = k$ ถ้า G เป็นกราฟซึ่งมีจุดยอดเป็นจำนวน $k + 1$ ให้ u เป็นจุดใด ๆ ใน G และให้กราฟ $G_0 = G - \{u\}$ เป็นกราฟย่อยของ G ที่ไม่มีจุดยอด u (ทุกเส้นใน G โยงกับจุดยอด u) เพราะว่า $\Delta(G_0) \leq \Delta(G)$ ดังนั้นจำนวนสีของ G_0 คือ $X(G_0)$และเนื่องจาก G_0 มีจำนวนจุดยอดใน k เพราะฉะนั้นตามหลักคณิตศาสตร์อุปนัย

$$\chi(G_0) \leq 1 + \Delta(G_0)$$

นั่นคือกราฟ ใช้สีอย่างมากที่สุดจำนวน $1 + \Delta(G)$ และเพราะว่ามีจุดยอดอย่างมากที่สุดจำนวน $\Delta(G)$ ที่ประชิดกับจุด u ดังนั้นจึงมีสีอีก 1 สีใน $1 + \Delta(G)$ สำหรับจุด u นั่นคือ กราฟ G ใช้สีอย่างมากที่สุด $1 + \Delta(G)$

ตัวอย่างที่ 4

จงให้เหตุผลว่าเพราะเหตุใด $\chi(K_n) = n$ และ $\chi(K_{m,n}) = 2$

วิธีทำ

K_n ต้องใช้สีจำนวน n สีเพราะจุดยอด 2 จุดใด ๆ ใน K_n เป็นจุดประชิด ดังนั้น $\chi(K_n) = n$ แต่ $\chi(K_{m,n}) = 2$ เพราะว่าจุดยอดในเซตเดียวกันของกราฟสองส่วนไม่มีเส้นประชิด จึงใช้เพียง 2 สี สำหรับจุดยอดในกราฟ 2 ส่วน

ตัวอย่างที่ 5

ให้ใช้ผลจากทฤษฎีบท $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ แสดงให้เห็นว่า $\chi(K_n) = n$

วิธีทำ

เพราะว่าในกราฟ K_n จำนวนดีกรีสูงสุดของจุดยอด หรือ $\Delta K_n = n - 1$ ดังนั้น $\chi(K_n) \leq 1 + \Delta(K_n) = 1 + n - 1 = n$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u>

ให้ใช้ผลจากทฤษฎีบท χ (G) $\leq$ 1 + Δ (G) แสดงให้เห็นว่ากราฟแบบวงเวียน G ที่มีจำนวนเส้นเชื่อม n เส้นจะมี χ (G) = 2 หรือ χ (G) = 3

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากกราฟ G เป็นกราฟวงเวียน จะมี Δ (G) = 2 จึงเห็นได้ง่ายว่าถ้ากราฟ G มีจุดยอดเป็นจำนวนคู่ จะได้ χ (G) $\leq$ Δ (G)

นั่นคือ χ (G)= 2

แต่ถ้ามีจุดยอดเป็นจำนวนคี่

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G) = 1 + 2 = 3$$

<u>หมายเหตุ</u>

ทฤษฎีของ อาร์. แอล. บรูกส์ ในเรื่องการให้สีจุดยอดของกราฟข่ายงานชี้ให้เห็นว่ากราฟเชื่อมโยง G ซึ่ง χ (G) = 1 + Δ (G) จะมีเฉพาะในกราฟ K_n กับกราฟวงเวียนที่มีจุดยอดเป็นจำนวนคี่เท่านั้น สำหรับกราฟเชื่อมโยงอื่น ๆ χ (G) $\leq$ Δ (G)

นอกจากทฤษฎีเกี่ยวกับการให้สีกราฟยังมีขั้นตอนวิธีตามหลักของเวลช์ และเพาเวลล์ ในการให้สีกราฟ G ซึ่งช่วยให้รู้จำนวนเลขสีว่า<u>สูงสุดไม่เกินเท่าใด</u>ด้วย ในบางกรณีการใช้ขั้นตอนวิธีนี้ง่าย แต่ในบางครั้งอาจจะซับซ้อนและใช้เวลานาน

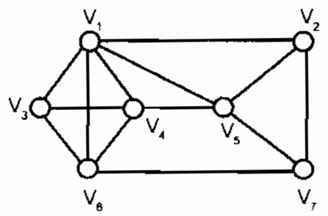
10.3 <u>ขั้นตอนวิธีของเวลช์และเพาเวลล์</u>

ในการกำหนดสีของกราฟ G มีวิธีการเรียงตามลำดับดังนี้คือ

1. เรียงลำดับจุดยอดของกราฟ G ตามจำนวนดีกรีจุดยอดซึ่งมีดีกรีเท่ากันให้เรียงติดกัน
2. เริ่มใช้สีแรก หรือสีที่หนึ่งกับจุดยอดซึ่งมีจำนวนดีกรีสูงสุด และจุดยอดที่มีจำนวนดีกรีสูงสุดรองลงมา ซึ่งไม่ได้เป็นจุดประชิดของจุดยอดที่มีดีกรีสูงสุด

3. **ใช้สีที่สองกับจุดยอดที่มีดีกรีรองลงมาซึ่งยังไม่ได้ให้สี และจุดยอดที่ไม่ประชิดกับจุดยอดในข้อ 2**
4. **ทำตามขั้นตอนซ้ำจนกระทั่งทุกจุดมีสีครบ**

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> **ให้ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์และเพาเวลล์ กำหนดสีกราฟ ต่อไปนี้**



<u>วิธีทำ</u>

ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์และเพาเวลล์ตามลำดับโดยใช้ตารางเพื่อให้เห็นชัดเจนได้ดังนี้

จุด	V_1	V_4	V_3	V_6	V_2	V_5	V_7
ดีกรี	5	4	4	4	3	3	3
สี	1	2	3	3	2	4	1

จำนวนสีที่ใช้น้อยที่สุด คือ 4 สี

<u>ทฤษฎีบท</u> 10.2

ถ้า G เป็นกราฟระนาบแล้ว $\chi(G) \leq 5$

<u>พิสูจน์</u> (ใช้คณิตศาสตร์อุปนัย)

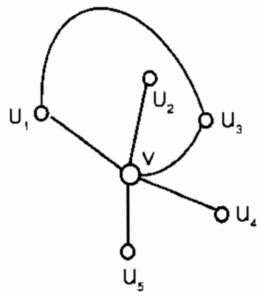
ในการพิสูจน์จะต้องแสดงว่ากราฟระนาบใด ๆ ที่มีจุดยอดจำนวน V จุดใช้สีไม่เกิน 5 สี

ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดเพียง 1 จุด นั่นคือ V = 1 เห็นได้ชัดเจนว่า $\chi(G) \leq 5$

ให้ k เป็นจำนวนเต็ม และ $k \geq 1$ และให้กราฟระนาบใด ๆ ที่มีจำนวนจุด k จุด ใช้สี 5 สี

ถ้าให้ G เป็นกราฟระนาบซึ่งมีจำนวนจุดเป็น k + 1 จุด และเขียนกราฟ G โดยใช้เส้นตรง เพราะว่า G เป็นกราฟระนาบดังนั้นต้องมีจุดยอด 1 จุดที่มีดีกรีสูงสุดไม่เกิน 5 ให้ G_0 = G - v เป็นกราฟย่อยของ G ซึ่งลบจุด v ออก ตามหลักของคณิตศาสตร์อุปนัยกราฟ G_0 ใช้สีจำนวน 5 สี สมมุติให้เป็นสี 1 สี 2 สี 3 สี 4 และ สี 5 ซึ่งถ้าจุด v ไม่ได้ประชิดกับจุดยอดใดที่ใช้สีทั้ง 5 นี้ จะสามารถใช้สีใดสีหนึ่งกับจุด v และกราฟ G ใช้สีเพียง 5 สี

สมมุติให้ v มีดีกรี 5 และประชิดกับจุดยอด u_1, u_2, u_3, u_4 และ u_5 ซึ่งใช้สี 1 ถึง สี 5 ตามลำดับ และตามเข็มนาฬิกา



ต่อไปจะแสดงให้เห็นวิธีการให้สีใหม่ เพื่อให้มีสีเหลือ 1 สี สำหรับจุด v ซึ่งมีวิธีการที่เป็นไปได้ 2 วิธี

วิธีแรก

ไม่มีวิถีจากจุดทั้งหลายใน G_0 ที่ใช้สี 1 หรือ 3 นั่นคือไม่มีวิถี u_1 - u_3

ตามวิธีนี้ ให้ H เป็นกราฟย่อยของ G และให้ H ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมทั้งหลายที่มีวิถีผ่าน u_1 หรือ u_3 และให้เริ่มที่จุด u เนื่องจากตามสมมุติฐานไม่มีวิถี u_1 - u_3 แสดงว่าต้องไม่มี u_3 ใน H และจุดยอดใด ๆ ซึ่งไม่อยู่ใน H แต่ประชิดกับจุดยอดที่ใช้สี 1 กับ สี 3 จุดยอดเหล่านี้ใช้สีอื่น ดังนั้น แสดงว่ามีการให้สีสลับกันไประหว่าง สี 1 กับ สี 3 ใน H นั่นคือ กราฟ G ใหม่จะใช้สีไม่เกิน 5 สี ซึ่งทั้ง u_1 และ u_3 ต้องใช้สี 3 ดังนั้นจุดยอด v จะได้รับการให้สีหนึ่งสีได้โดยอิสระ ทำให้การให้สีใน G ไม่เกิน 5 สี

วิธีที่สอง

ให้มีวิถี P ใน G_0 จากจุดยอด u_1 ถึง u_3 โดยผ่านจุดต่าง ๆ ทั้งหลายซึ่งใช้สี 1 หรือ สี 3 ตามวิธีนี้ วิถี P ซึ่งต่อด้วยจุดยอด v และ u_1 จะทำให้เกิดวงเวียนใน G ซึ่งวงเวียนนี้ไม่รวมทั้ง u_2 และ u_4 ดังนั้น วิถีใด ๆ จาก u_2 ถึง u_4 ต้องตัดวิถี P และเนื่องจาก G เป็นกราฟระนาบ การตัดผ่านวิถีนี้เกิดขึ้นเฉพาะที่จุดยอดของวิถี P เป็นผลตามมาอีกไม่มีวิถีจาก u_2 ถึง u_4 ใน G_0 ที่ใช้สีเพียง 2 สี คือ สี 2 กับ สี 4 ดังนั้นเช่นเดียวกันกับวิธีแรกสถานการณ์ คือใช้สีได้ 5 สี ในกราฟ G

ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นวิธีการนำหลักการของจำนวนเลขสีไปใช้ในการแก้ปัญหาที่พบกันโดยทั่วไปในมหาวิทยาลัย ปัญหานั้นคือ การจัดตารางสอบ ในมหาวิทยาลัยขนาดกลาง จะมีวิธีการจัดตารางสอบ 500 ถึง 600 วิชาในช่วงเวลาอันสั้น หลักสำคัญคือ การจัดให้มีการสอบซ้ำซ้อนของนักศึกษาให้น้อยที่สุด

<u>ตัวอย่างที่ 11</u>

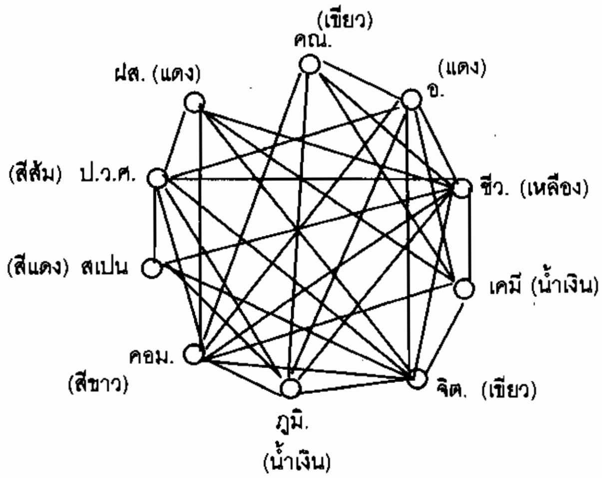
สมมุติว่าในเทอมการศึกษาหนึ่งมีนักศึกษาลงทะเบียนเรียนวิชาต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ	ชีววิทยา	เคมี
คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ	วิทยาการคอมพิวเตอร์	ภูมิศาสตร์
ชีววิทยา	จิตวิทยา	ภูมิศาสตร์	ภาษาสเปน
ชีววิทยา	วิทยาการคอมพิวเตอร์	ประวัติศาสตร์	ภาษาฝรั่งเศส
ภาษาอังกฤษ	จิตวิทยา	ประวัติศาสตร์	วิทยาการคอมพิวเตอร์
จิตวิทยา	เคมี	วิทยาการคอมพิวเตอร์	ภาษาฝรั่งเศส
จิตวิทยา	ภูมิศาสตร์	ประวัติศาสตร์	ภาษาสเปน

ปัญหาคือ จะจัดตารางสอบให้มีคาบการสอบจำนวนต่ำสุดเท่าใด สำหรับกระบวนวิชา 10 วิชาข้างต้น โดยมีเงื่อนไขว่านักศึกษาไม่มีการสอบซ้ำซ้อน

<u>วิธีทำ</u>

เพื่อใช้ในการพิจารณาสถานะการณ์ จะสร้างกราฟซึ่งมีจุดยอด 10 จุด คือ คณ. อ. ชีว. เคมี คอม. ภูมิ. จิต. สเปน. ปวศ. ฝส. และกระบวนวิชา 2 วิชา ซึ่งไม่สอบซ้ำซ้อนจะมีเส้นเชื่อมถึงกัน



ปัญหาของการจัดตารางสอบในที่นี้ คือ ให้มีการสอบเป็นจำนวนคาบให้น้อยที่สุด ซึ่งในที่นี้คือจำนวนสีของกราฟในรูปข้างต้น เนื่องจากกราฟนี้มีกราฟย่อยเป็นกราฟสมบูรณ์ K_5 ดังนั้น จะต้องใช้สีที่แตกต่างกันอย่างน้อยที่สุด 5 สี (จุดยอด คณ. อ. ชีว. ภูมิศาสตร์, วิทยาการคอมพิวเตอร์) นั่นคือกระบวนวิชา 5 วิชานี้ต้องสอบในคาบเวลาที่แตกต่างกัน แต่ 5 สี ไม่เพียงพอ เนื่องจากวิชาจิตวิทยากับประวัติศาสตร์ เป็นจุดประชิดกันและต่างประชิดกับจุด อ. ชีว. ภูมิและคอมพิวเตอร์ ดังนั้น จำนวนสีของกราฟ (ซึ่งแทนคาบการจัดตารางสอบ) คือ 6 สี กล่าวโดยสรุปว่าเพื่อไม่ให้มีการสอบซ้ำซ้อน จะต้องแบ่งการสอบออกเป็น 6 คาบ ดังนี้

คาบ 1	คณิต จิตวิทยา
คาบ 2	อ. สเปน ฝส.
คาบ 3	ชีววิทยา
คาบ 4	เคมี ภูมิศาสตร์
คาบ 5	วิทยาการคอมพิวเตอร์
คาบ 6	ประวัติศาสตร์

<u>ข้อสังเกต</u>

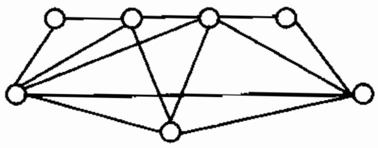
จำนวนต่ำสุดของคาบการสอบไล่ คือ จำนวนเลขสีของกราฟเพราะว่ากราฟนี้มีกราฟย่อยแบบ K_5 (จุดยอดคือ คณิต, อ, ชีว, ภูมิ, คอม) จึงต้องใช้สีอย่างน้อยที่สุด 5 สี (วิชาที่สอบซึ่งแทนด้วยจุดเหล่านี้ต้องจัดตารางเวลาสอบให้แตกต่างกัน) จะใช้สี 5 สีในกราฟนี้ไม่พอเพียง แต่เพราะว่าวิชาจิตวิทยา กับประวัติศาสตร์ ต่างก็ประชิดกับวิชาภาษาอังกฤษ ชีววิทยา ภูมิศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ดังนั้น จำนวนสีที่ใช้จะเท่ากับ 6

❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖

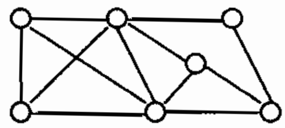
แบบฝึกหัด

1. ถ้ากราฟ G มี $\chi(G) = 1$ แสดงว่า G เป็นกราฟแบบใด
2. ให้หาจำนวนเลขสี่ $\chi(G)$ ของกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีทำและอธิบายประกอบคำตอบในแต่ละกรณีด้วย

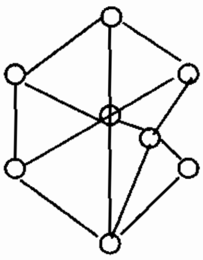
2.1



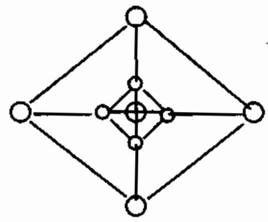
2.2



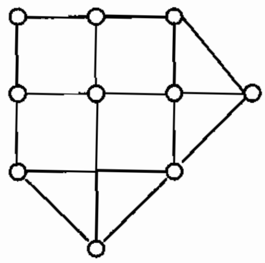
2.3



2.4

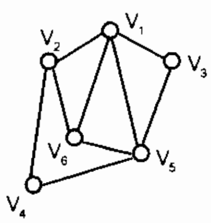


2.5

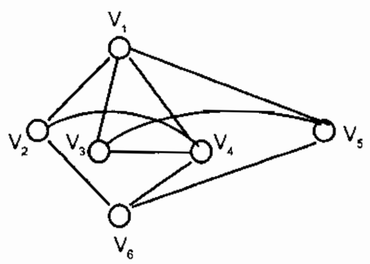


3. กราฟต้นไม้เป็นกราฟระนาบหรือไม่ อธิบาย
4. ให้หาจำนวนเลขสี่ของกราฟ K_6 กราฟ K_{10}
5. ให้ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์ เพาเวลล์ หาจำนวนเลขสีของกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

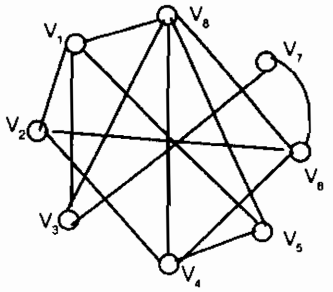
5.1



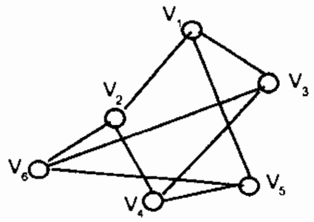
5.3



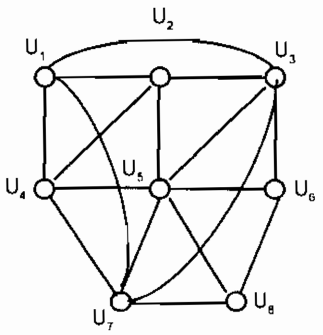
5.2



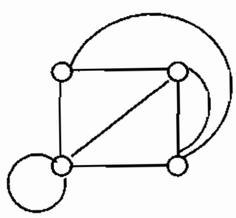
5.4



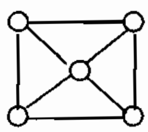
6. ให้ใช้ขั้นตอนวิธีของเวลช์ เพาเวลล์ของจำนวนเลขสีของกราฟ



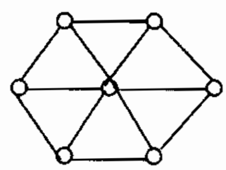
7. ให้หาจำนวนเลขสีของกราฟสองส่วน $K_{3,4}$ และ $K_{2,6}$
8. จงพิสูจน์ให้เห็นว่ากราฟสองส่วนมีจำนวนเลขสีเท่ากับ 2
9. ให้เขียนกราฟคู่กันจากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้



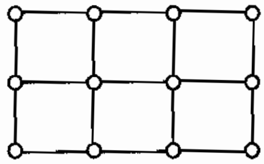
(1)



(2)



(3)



(4)

10. ในการสอบไล่ปลายปีมีวิชาต่าง ๆ 7 วิชาที่ต้องจัดสอบดังนี้ คือ

วิชา เลขคณิต (A) ชีววิทยา (B) เคมี (C) ศิลปวาดรูป (D)

ภาษาอังกฤษ (E) ภาษาฝรั่งเศส (F) และภาษาเยอรมัน (G)

ถ้ามีวิชาที่นักศึกษาลงทะเบียนไว้เป็นคู่ ๆ ต่าง ๆ คือ

AB, AC, AD, AG, BC, BD, BE, BG, CD, CF, CG, DE, DF, EF, EG, FG

จะมีวิธีการจัดตารางสอบอย่างไรเพื่อให้มีคาบการสอบน้อยที่สุด (นักศึกษาไม่ต้องสอบซ้ำซ้อน)

บทที่ 11
ประยุกต์ของกราฟ

ในบทนี้จะอธิบายถึงประยุกต์ในด้านต่าง ๆ ของกราฟที่พบว่าเป็นประโยชน์ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ เนื่องจากเนื้อหาด้านการประยุกต์ครอบคลุมสาขาวิชาการต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก ดังนั้น การนำเสนอในที่นี้จึงเป็นรูปแบบกว้าง ๆ ของกราฟที่ได้รับการนำไปใช้ สำหรับรายละเอียดที่ลึกซึ้ง จะสามารถหาได้จากหนังสืออ่านเพิ่มเติมท้ายเล่ม

11.1 <u>ประยุกต์ของกราฟในด้านต่าง ๆ</u>

1. ด้านความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล

ทางด้านสังคมศาสตร์ได้ใช้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลด้วยการกำหนดให้จุดยอดแทนบุคคลในกลุ่มหรือชุมชน และให้เส้นเชื่อมแทน ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล เช่น มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด x กับ y ถ้า x ชอบ y หรือ x มีความเห็นเหมือน y หรือ x หลีกเลี่ยงการพบปะกับ y หรือ x มีการสื่อสารกับ y เป็นต้น ในตอนแรกนี้ จะกำหนดให้ความสัมพันธ์เป็นแบบสมมาตร นั่นคือ x ชอบ y ก็ต่อเมื่อและต่อเมื่อ y ชอบ x ความสัมพันธ์เช่นนี้สามารถใช้กราฟได้กับความสัมพันธ์เชิงเครือญาติ ความสัมพันธ์ทางวัฒนธรรม ความสัมพันธ์ระหว่างพรรคการเมือง และความสัมพันธ์ระหว่างประเทศซึ่งเป็นพันธมิตรมีความสัมพันธ์ทางการทูต หรือเห็นด้วยกับยุทธวิธีทางการเมือง

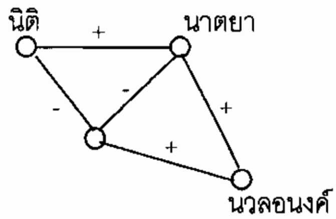
ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์สามารถใช้กราฟเครื่องหมาย (signed graphs) ซึ่งเป็นกราฟที่มีเครื่องหมายบวกหรือลบกำกับที่เส้นเชื่อม เพื่อแสดงความสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน เช่น ชอบ รัก เห็นด้วย พูดด้วย ฯลฯ หรือแสดงความสัมพันธ์เชิงลบเช่น เกลียด ไม่ชอบ ไม่เห็นด้วย หลีกเลี่ยง ฯลฯ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

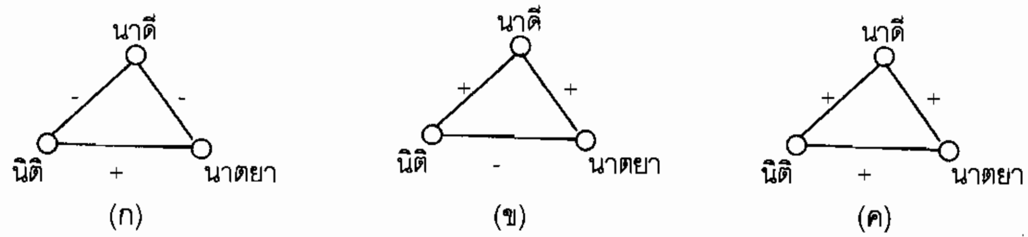
นักศึกษา 4 คน คือ นิติ นาตยา นาดี และนวลอนงค์ อยู่ห้องเดียวกัน นิติชอบ นาตยา แต่ไม่ชอบนาดี ส่วนนาตยาชอบนิติและนวลอนงค์ แต่ไม่ชอบนาดี นวลอนงค์ชอบนาตยาและนาดี ส่วนนาดีชอบนวลอนงค์แต่ไม่ชอบนิติกับนาตยา ให้เขียนกราฟแสดงความรู้สึกของนักศึกษาทั้ง 4 คน

<u>วิธีทำ</u>

เพราะว่าไม่มีข้อมูลเกี่ยวกับความรู้สึกของนิติกับนวลอนงค์ ดังนั้น เมื่อเขียนกราฟจะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างคนทั้งสอง (ดังรูป)



ในกรณีของสถานะการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการทำงานของนักศึกษา 3 คน คือ นิติ นาตยา และนาดี ถ้าใช้กราฟเครื่องหมายแสดงความรู้สึกของคนทั้ง 3 ได้เป็น 3 แบบ ต่อไปนี้



จะเห็นได้ว่าตามแบบ (ก) ทั้งนิติและนาตยาไม่ชอบนาดี ดังนั้น นาดีทำงานร่วมกับนิติหรือนาตยาไม่ได้ นาดีต้องทำงานตามลำพังแต่นาตยากับนิติสามารถร่วมกันทำงานได้ ส่วนแบบ (ข) นาดีชอบกับทั้งนิติและนาตยา แต่เนื่องจากนิติกับนาตยามีความรู้สึกไม่ดีต่อกัน ดังนั้น ถ้าทั้งสามคนทำงานร่วมกันจะทำให้เกิดความขัดแย้งหรือความเครียดส่วนแบบ (ค) เป็นแบบที่ทั้งสามคนทำงานร่วมกันได้

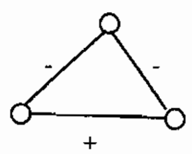
สถานะการณ์แบบ (ก) และ (ค) ถือเป็นแบบที่สมดุลย์ (balanced) ส่วนแบบ (ข) เป็นแบบไม่สมดุลย์ ซึ่งจากการกำหนดเช่นนี้ทำให้มีบทนิยามของกราฟเครื่องหมายแบบสมดุลย์ดังนี้ คือ

บทนิยาม

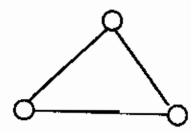
กราฟเครื่องหมายเรียกว่าเป็นแบบสมดุลย์ ถ้าจุดยอดของเส้นเชื่อมซึ่งมีเครื่องหมายบวกมีสีเดียวกัน ส่วนจุดยอดของเส้นเชื่อมซึ่งมีเครื่องหมายลบมีสีแตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 2

จากตัวอย่างที่ 1 เมื่อจำลองสถานะการณ์แบบ (ก) และแบบ (ค) ด้วยการให้สีจุดยอด (สีดำ - สีขาว) ตามบทนิยาม จะได้กราฟแบบสมดุลย์ ดังนี้



แบบ (ก)

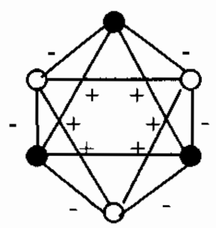


แบบ (ค)

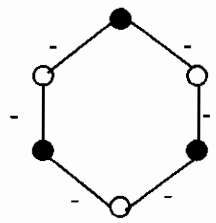
ส่วนสถานะการณ์แบบ (ข) ไม่สามารถจะเขียนกราฟแบบสมดุลย์ได้

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดกราฟแบบสมดุลย์อันดับ 6 ดังนี้



ถ้าลบเส้นเชื่อมที่เป็นบวกออกทั้งหมดจะได้กราฟแบ่งกั้น คือ



ซึ่งแสดงให้เห็นว่ากราฟแบบสมดุลย์ และกราฟแบ่งกั้นมีความสัมพันธ์กันกล่าวคือในกราฟวงเวียนทุกวงเวียนจะมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนคู่ ส่วนในกราฟแบบสมดุลย์ทุกวงเวียนจะมีเส้นเชื่อมที่มีเครื่องหมายลบเป็นจำนวนคู่

2. **<u>ด้านภาษา</u>**

แนวความคิดเรื่องกราฟต้นไม้สัมพันธ์กับงานของเคอร์ชอฟทางด้านวงจรไฟฟ้าและงานของอาร์เธอร์ เคย์เลย์ ทางด้านการนับจำนวนโมเลกุลทางเคมี กราฟต้นไม้ ในปัจจุบันได้รับการนำไปใช้ในหลายสาขาวิชาทั้งทางด้านสังคมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ในระยะเวลาประมาณ 40 ปี ที่ผ่านมาได้มีผลงานของศาสดราจารย์ ในมหาวิทยาลัยที่แสดงวิถีทางใหม่ ๆ ในการอธิบายโครงสร้างทางภาษาที่เป็นแบบธรรมชาติ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการสร้างเครื่องรวบรวมข้อมูลสำหรับภาษาคอมพิวเตอร์ระดับสูง ในการศึกษาได้ใช้กราฟต้นไม้แสดงการหาประโยคที่ถูกต้องตามหลักไวยากรณ์ จากหลักเกณฑ์พื้นฐาน เช่นในภาษาอังกฤษ ซึ่งตามหลักไวยากรณ์ มีหลักเกณฑ์ส่วนหนึ่งที่กำหนดว่า

1. ประโยคเกิดจากการเขียนนามวลีก่อนแล้วตามด้วยกริยาวลี
2. นามวลีเกิดจากการเขียนคำนำหน้านามก่อนแล้วตามด้วยคำนาม หรือ
3. นามวลีเกิดจากการเขียนคำนำหน้านามก่อน แล้วเขียนคำคุณศัพท์ และตามด้วยคำนาม
4. กริยาวลีเกิดจากการเขียนคำกริยาก่อนแล้วตามด้วยนามวลี

ถ้าคำนำหน้านามคือ the คำคุณศัพท์คือ big คำกริยา คือ kick คำนามคือ boy และคำนามอีกคำหนึ่งคือ ball นำมาเขียนอธิบายตามสัญกรณ์ ซึ่งมีสัญลักษณ์ 1 แทนคำว่า หรือและใช้วงเล็บ < > กับพจน์ต่าง ๆ เช่น ประโยคหรือนามวลี ดังนี้

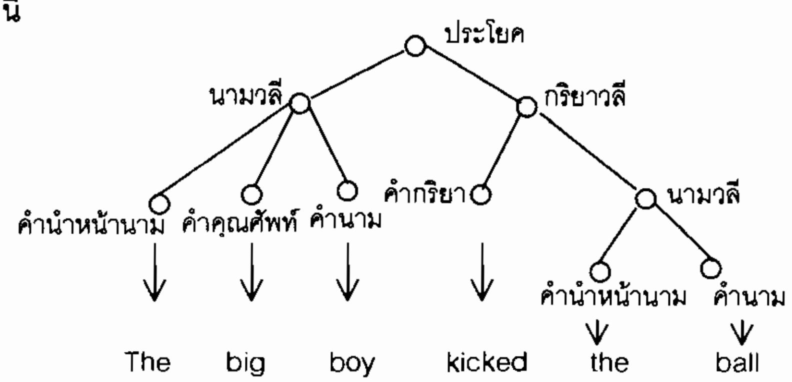
1 < ประโยค > < นามวลี > < กริยาวลี >

2,3 < นามวลี > < คำนำหน้านาม > < นาม > / < คำนำหน้านาม >

< คำคุณศัพท์ > < คำนาม >

4	< กริยาวลี >	< คำกริยา > < นามวลี >
	< คำนำหน้านาม >	the
	< คำคุณศัพท์ >	big
	< คำกริยา >	kicked
	< คำนาม >	boy / ball

ดังนั้น ตามเกณฑ์ดังกล่าว ประโยค " the big boy caught the ball" จะเขียนอธิบายด้วยกราฟต้นไม้ได้ดังนี้

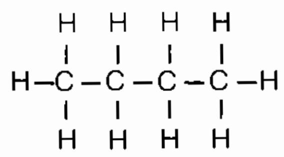


ในภาษาศาสตร์มีศัพท์ 2 คำ คือ semantics ซึ่งหมายถึงความหมายของคำและความสัมพันธ์ระหว่างคำ กับ syntax ซึ่งหมายถึง โครงสร้างไวยากรณ์ของประโยค ประโยคอาจเขียนได้ถูกต้องตามหลักของโครงสร้างไวยากรณ์ แต่ขาดความหมายในแง่ของคำและความสัมพันธ์ระหว่างคำ เช่น ประโยค "the big ball caught the boy" หรือประโยคที่ให้ความหมายในแง่ของคำและความสัมพันธ์ระหว่างคำ แต่ไม่ถูกต้องตามหลักของโครงสร้างไวยากรณ์ เช่น "Me angry"

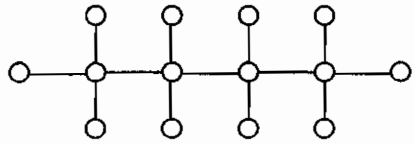
3. **ด้านวิทยาศาสตร์**

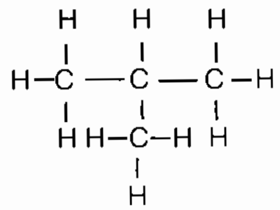
นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน ชื่อ กุสตาฟ เคอร์ชอฟ (2367 - 2430) เป็นบุคคลแรกที่โยงความสัมพันธ์ระหว่างกราฟต้นไม้กับวงจรไฟฟ้า และต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อ อาร์เทอร์ เคย์เลย์ ได้ใช้กราฟต้นไม้หาสารประกอบที่มีจำนวนอะตอมในหนึ่งโมเลกุลเหมือนกันแต่มีสมบัติต่างกัน ของไฮโดรคาร์บอนบางชนิด โมเลกุลไฮโดรคาร์บอนประกอบด้วยคาร์บอนกับไฮโดรเจนซึ่งอะตอมคาร์บอนแต่ละตัวสามารถเชื่อมต่อกับไฮโดรเจน 4 อะตอม ส่วนไฮโดรเจน 1 อะตอม เชื่อม

ได้กับคาร์บอน 1 อะตอม ดังนั้นโครงสร้างของโมเลกุลไฮโดรคาร์บอน สามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ในรูปของกราฟต้นไม้

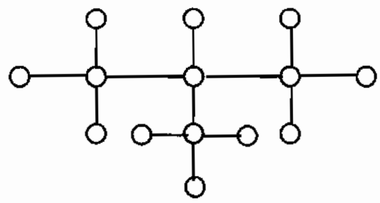


บิวเทน





ไอโซบิวเทน

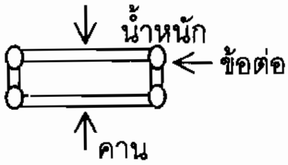


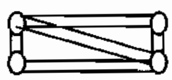
จะเห็นได้ว่ากราฟทั้งสองมีคาร์บอน 4 อะตอม และไฮโดรเจน 10 อะตอม เท่ากัน แต่มีสมบัติทางเคมีแตกต่างกัน โมเลกุลทั้งสองชนิดนี้เรียกว่าบิวเทน และไอโซบิวเทน ซึ่งมีสูตรทางเคมีเหมือนกันเป็น $C_4 H_{10}$ แต่การจัดเรียงตัวของอะตอมในโมเลกุลแตกต่างกัน

เมื่อรู้จำนวนของคาร์บอนในโมเลกุลไฮโดรคาร์บอนอิ่มตัวบางชนิดจะหาจำนวนสูงสุดของไฮโดรเจนได้ ศาสตราจารย์เคย์เลย์ ได้แสดงให้เห็นไว้แล้วว่าถ้าโมเลกุลไฮโดรคาร์บอนอิ่มตัวมีจำนวนคาร์บอน k อะตอม จะมีจำนวนไฮโดรเจน 2k + 2 อะตอม

4. **<u>ด้านการก่อสร้าง</u>**

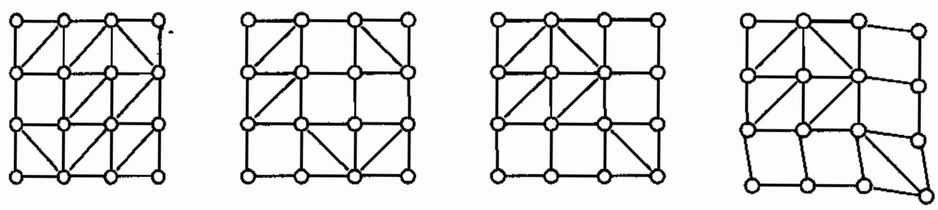
ในการก่อสร้างอาคารส่วนมากใช้คานรองรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และมีโครงสร้างในลักษณะของระนาบซึ่งใช้ตัวยึดเชื่อมกรอบเข้าด้วยกัน และแบบง่ายที่สุดคือ แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีคานและข้อต่ออย่างละสี่ส่วน (ดังรูป)





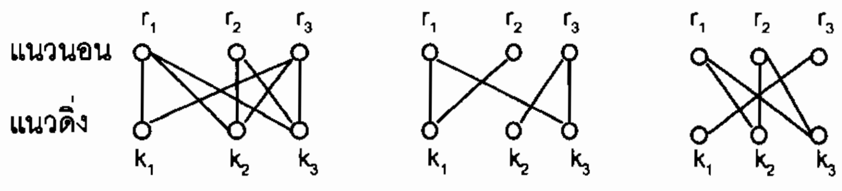
แต่มีข้อเสียที่อาจจะเกิดจากน้ำหนักที่ต้องรองรับ ถ้ามากเกินไปจะทำให้เกิดการเบี่ยงเบนไปจากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้น ต้องทำให้โครงสร้างแข็งแรงด้วยการใส่คานในแนวทแยงซึ่งช่วยแก้แรงดึงตัวและแรงบีบได้ อย่างไรก็ดี ในกรณีที่อาคารที่ก่อสร้างต้องใช้คานรองรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวนมากก็ไม่จำเป็นต้องใช้คานในแนวทแยงกับทุกคานสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพียงแต่หาจำนวนต่ำสุดของคานทแยงที่ต้องใช้ให้ได้แรงรองรับต้านทานเพียงพอไม่ให้เกิดพังทลายของอาคาร และในทางปฏิบัติอาจเพิ่มคานทแยงให้มีจำนวนสูงกว่าจำนวนต่ำสุด เล็กน้อย เพื่อความปลอดภัยมั่นคงยิ่งขึ้น แต่นั่นหมายถึงต้องเพิ่มค่าใช้จ่ายมากขึ้นซึ่งอาจไม่จำเป็น

จากโครงสร้างตัวอย่างต่อไปนี้



จะเห็นได้ว่า แบบ (ก) ใช้คานทแยงมากเกินไป แบบ (ข) ใช้คานทแยงตามสมควร แต่มั่นคงดีหรือไม่จะต้องพิจารณา ส่วนแบบ (ค) ใช้คานทแยงไม่มั่นคงตามสมควร อาจเกิดการเสียรูปของโครงสร้างไปเป็นแบบ (ง)

วิธีการพิจารณาโครงสร้างว่าใช้คานทแยงมากหรือน้อยเกินไป จะเสริมหรือเอาคานทแยงออกที่ใด สามารถใช้เรื่องของกราฟสองส่วนได้ โดยกำหนดให้เซตของจุดยอดชุดหนึ่งสมนัยกับจุดยอดในแนวนอนของโครงสร้าง และเซตของจุดยอดอีกชุดหนึ่งสมนัยกับจุดยอดในแนวดิ่งของโครงสร้าง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดของต่างเซตเกิดขึ้นเมื่อช่องสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีคานทแยงตามข้อกำหนดเช่นนี้จะได้กราฟสองส่วนในรูป



กราฟสองส่วนแบบ (ก) ซึ่งได้จากโครงสร้างแบบ (ก) ที่มีคานทแยงมากไปเป็นกราฟเชื่อมโยง ในทำนองเดียวกันกราฟสองส่วนแบบ (ข) ซึ่งมาจากโครงสร้างแบบ (ข) ก็เป็นกราฟเชื่อมโยง ส่วนกราฟสองส่วนแบบ (ค) ซึ่งได้จากโครงสร้างแบบ (ค) เป็นกราฟแบบไม่เชื่อมโยง ตามหลักการทั่วไปกำหนดไว้ว่า โครงสร้างที่มีคานรองรับแน่นหนาจะสมนัยกับกราฟสองส่วนซึ่งมีความเชื่อมโยง ส่วนโครงสร้างที่มีคานรองรับไม่แน่นหนาจะสมนัยกับกราฟสองส่วน ซึ่งขาดความเชื่อมโยง

หลักการนี้อธิบายได้ว่าแต่ละคานที่รองรับในโครงสร้างจะบังคับให้โครงสร้างในแนวนอนและแนวดิ่งอยู่ในสภาพที่ตั้งฉากกัน เช่นในกราฟของโครงสร้าง (ก) วิถี $r_1, k_2, r_2, k_3, r_3, k_1$ โยงจุดยอดทั้ง 6 จุด แสดงว่าแถวที่(แนวนอน) 1 ตั้งฉากกับหลักที่(แนวดิ่ง) 2 หลักที่ 2 ตั้งฉากกับแถวที่ 2 และแนวที่ 2 ตั้งฉากกับหลักที่ 3 ฯลฯ การที่โครงสร้างในทุกแถวตั้งฉากกับทุกหลักมีผลทำให้โครงสร้างมีความแน่นหนา แต่ในกราฟของโครงสร้าง (ค) ไม่มีวิถีเชื่อมโยงจุดยอด r_3 และ k_1 กับจุดยอด r_1, r_2, k_2 หรือ k_3 ดังนั้น แถวที่ 3 กับหลักที่ 1 จึงไม่ตั้งฉากกับแถวที่ 1 แถวที่ 2 หลักที่ 2 หรือหลักที่ 3 ดังนั้น โครงสร้างจึงไม่แน่นหนาและอาจเอนเอียงไปได้ดังภาพ (ค)

กราฟสองส่วนสามารถช่วยในการพิจารณาว่าจะเอาคานทแยงออกจากส่วนใดของโครงสร้างได้โดยที่โครงสร้างยังแข็งแรงแน่นหนาและใช้จำนวนคานทแยงน้อยที่สุด เริ่มจากกราฟสองส่วนแบบ (ข) จะเห็นได้ว่าเป็นกราฟซึ่งไม่มีวงเวียน ดังนั้นถ้าเอาเส้นเชื่อมออกเพียงเส้นใดเส้นหนึ่งจะทำให้กราฟขาดความเชื่อมโยง ซึ่งหมายถึงโครงสร้างจะขาดความแข็งแรงจึงกำหนดได้ว่าโครงสร้างพร้อมคานทแยงรองรับแบบ (ข) เป็นแบบที่ใช้จำนวนคานทแยงต่ำสุด สำหรับกราฟสองส่วนแบบ (ก) จะพบว่ามีหลายวงเวียนดังนั้น สามารถเอาคานทแยงออกได้หลายคานโดยไม่กระทบกระเทือนความมั่นคงของโครงสร้าง เช่น $r_1 k_1 r_3 k_3 k_3 r_1$ เป็นวงเวียน จะเอาเส้นเชื่อม $r_1 k_1$, $r_1 k_3$, $r_3 k_1$ หรือ $r_3 k_3$ ออกได้โดยไม่กระทบความมั่นคงของโครงสร้าง ตามตัวอย่างนี้จะเอาเส้นเชื่อมออกได้ถึง 3 เส้น โดยโครงสร้างยังแข็งแรง (เช่น $r_1 k_1$,$r_1 k_3$ และ $r_3 k_3$) โดยแต่ละขั้นจุดสำคัญคือตัดเส้นเชื่อมออกจากวงเวียนของกราฟจนได้กราฟสองส่วนซึ่งไม่มีวงเวียน หรือกราฟต้นไม้แบบทอดข้าม

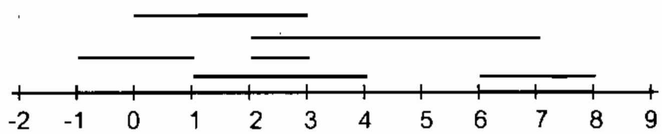
<u>ประยุกต์ของกราฟแบบช่วงและกราฟแบบเข้ากันได้</u>

กราฟสามารถใช้แทนปัญหาของสถานะการณ์ซึ่งเกี่ยวกับการจัดอันดับสิ่งของหรือการจัดเรียงข้อมูล กราฟแบบนี้ได้รับการนำไปใช้อย่างกว้างขวาง ลักษณะของกราฟแบบนี้จะมีจุดยอด

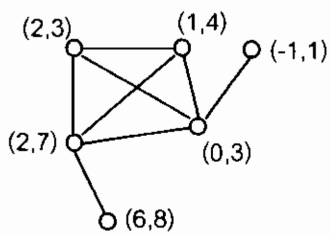
แทนสิ่งของหรือข้อมูล มีเส้นเชื่อมแทนสิ่งของเป็นคู่ที่ลักษณะบางอย่างเข้ากันได้ การใช้กราฟแบบนี้เริ่มแรกในเรื่องของพันธุกรรมต่อมาได้นำไปใช้ทางด้านสิ่งแวดล้อม โบราณคดี จิตวิทยา และการจับคู่ของต้นฉบับเอกสารที่เก่าแก่ ในการประยุกต์ด้านสัญญาณไฟ ใช้กราฟแบบช่วงซึ่งกำหนดดังต่อไปนี้

<u>กราฟแบบช่วง</u>

ถ้ากำหนดให้มีช่วงจำนวนซ้อนเหลื่อมกันเป็น (-1,1) , (0,3) , (1,4) , (2,3) , (2,7) และ (6,8) ซึ่งแต่ละช่วงเขียนแสดงดังนี้คือ



เมื่อนำกราฟมาสัมพันธ์กับช่วงจำนวนเหล่านี้โดยมีจุดยอดแทนแต่ละช่วงและมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดถ้ามีจำนวนอย่างน้อยที่สุด 1 ตัวร่วมกันในแต่ละช่วง เช่น ช่วง (1,4) กับ (2,3) ช่วง (2,3) กับ (2,7) และ (2,7) กับ (6,8) ต่างมีจำนวนในช่วงร่วมกันดังนั้นจะมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดเหล่านี้ ส่วนช่วง (-1,1) กับ (1,4) (ต่างเป็นช่วงเปิด) ไม่มีจำนวนร่วมกัน ดังนั้นไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดนี้

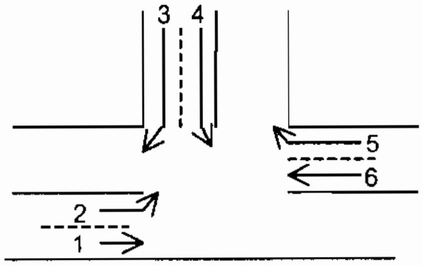


กราฟแบบช่วง

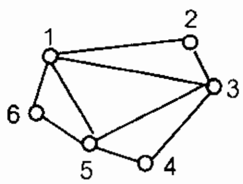
กราฟใด ๆ ซึ่งเกิดขึ้นจากเซตของข้อมูลตามลักษณะเช่นนี้เรียกว่า <u>กราฟแบบช่วง</u>

5 **<u>ด้านการกำหนดสัญญาณไฟ</u>**

ถ้ากำหนดให้สามแยกแห่งหนึ่งมีไฟสัญญาณจราจรให้รถวิ่งในทิศทางตามแผนภาพต่อไปนี้



จะเห็นได้ว่าบางส่วนของรถที่ใช้เส้นทางนี้สามารถแล่นไปในเวลาเดียวกันโดยปราศจากอันตราย เช่นรถจากช่องทางที่ 1 แล่นไปด้วยกันได้กับรถที่แล่นในช่องทาง 2 ช่องทาง 3 ช่องทาง 5 และช่องทาง 6 แต่รถในช่องทาง 1 กับช่องทาง 4 จะแล่นไปในเวลาเดียวกันไม่ได้ ในลักษณะเดียวกันรถในช่องทาง 6 แล่นได้พร้อมกับรถในช่องทาง 1 และช่องทาง 5 แต่จะต้องแล่นเวลาต่างกันกับรถในช่องทาง 2 ช่องทาง 3 และช่องทาง 4 สถานการณ์ของการจัดอันดับเหล่านี้สามารถใช้กราฟแบบเข้ากันได้ โดยให้จุดแทน
ช่องทางที่รถแล่นและเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดแทนช่องทางที่รถวิ่งพร้อมกัน จากแผนภาพการจราจรในทางแยกข้างต้น สามารถเขียนเป็นกราฟ ได้ดังนี้

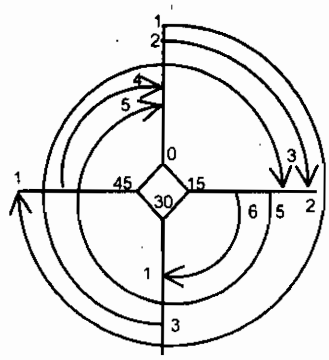


กราฟแบบเข้าได้

ในกรณีที่เจ้าหน้าที่ต้องการใช้สัญญาณไฟเพื่อควบคุมการจราจรบริเวณสามแยกนี้ เจ้าหน้าที่จะกำหนดสัญญาณไฟอย่างไรเพื่อไม่ให้เกิดอุบัติเหตุขึ้นได้

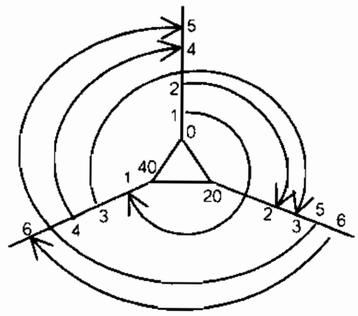
ถ้าสัญญาณไฟมีจังหวะหมุนเวียน 60 วินาที วิธีการแก้ปัญหาคือ ให้รถแต่ละช่องทางมีระยะเวลาแล่นผ่านสามแยก 10 วินาที โดยมีรถซึ่งแล่นไปพร้อมกันในช่องทางที่ไม่กีดขวางกันได้ด้วย จะได้ลดเวลาของรถแต่ละช่องทางที่ต้องรอสัญญาณ ซึ่งจะได้แผนภาพและคำอธิบายดังนี้คือ ในช่วงเริ่มแรกจนถึง 15 วินาทีรถในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5

จะได้สัญญาณไฟเขียวในช่อง 15 - 30 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 5 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว ในช่วง 30 - 45 วินาทีในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว และในช่วง 45 - 60 วินาที รถในช่องทาง 3 กับ 4 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว นั่นคือ ในระยะเวลา 60 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว 45 วินาที ส่วนรถในช่องทาง 2 กับ 4 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว 15 วินาที จึงได้เวลารวมทั้งหมด "ที่ต้องรอ"



ของรถ คือ 3 (15) บวกกับอีก 3 (45) ได้เท่ากับ180 วินาที จึงเห็นได้ว่าการจัดเช่นนี้ลดเวลาที่ต้องรอ ถึง 40 เปอร์เซ็นต์ ของเวลาที่ต้องรอทั้งหมดคือ 6(50) หรือเท่ากับ 300 วินาที

วิธีแก้ปัญหาอีกวิธีหนึ่งซึ่งจัดช่วงเวลาสัญญาณไฟเขียวเป็นช่วงละ 20 นาที ดังนี้คือ ในช่วง 0 - 20 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 2 และ 3 ได้สัญญาณไฟเขียว ในช่วง 20 - 40 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 5 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว และในช่วง 40 - 60 วินาที รถในช่องทาง 3 กับ 4 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว



จะเห็นได้ว่าเวลา "ที่ต้องรอ" รวมแล้วเท่ากับ 180 วินาที เช่นเดียวกัน เพียงแต่ตามวิธีนี้ในแต่ละช่วง 60 วินาที รถในช่องทาง 1 กับ 3 และ 5 ได้สัญญาณไฟเขียว 40 วินาที ส่วนรถในช่องทาง 2 กับ 4 และ 6 ได้สัญญาณไฟเขียว 20 วินาที

การเลือกวิธีแก้ปัญหาโดยทั่วไปขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น จำนวนรถในแต่ละช่องทาง หรือจำนวนเวลาที่จะกำหนดให้รถในช่องทางใดได้สัญญาณไฟเขียวต่ำสุด เป็นต้น

คำตอบของปัญหาเหล่านี้สามารถใช้กราฟแบบเข้ากันได้มาพิจารณา กล่าวคือ เมื่อต้องการให้จำนวนรถที่แล่นได้ในเวลาเดียวกันมีจำนวนสูงสุด จะต้องหากราฟย่อยแบบที่เข้ากันได้ซึ่งเป็นไปตามความต้องการนี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ ซึ่งมีจุดยอดเป็น 1 กับ 2

และ 3 หรือ 1 กับ 6 และ 5 หรือ 1 กับ 3 และ 5 หรือ 3 กับ 4 และ 5 ซึ่งก็คือช่องทางเดินรถในปัญหาข้างต้น จึงทำให้ได้หลักการทั่วไปในการแก้ปัญหา คือ

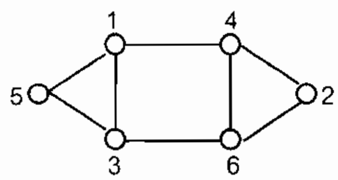
1. สร้างกราฟแบบเข้ากันได้
2. สำหรับแต่ละจุดยอดของกราฟแบบเข้ากันได้ ให้หากราฟย่อยสมบูรณ์ ซึ่งใหญ่ที่สุดที่รวมแต่ละจุดยอด
3. หารจำนวนเวลาที่มีด้วยจำนวนกราฟย่อยสมบูรณ์ที่ได้จากข้อ 2 แล้ว จัดกราฟย่อยสมบูรณ์แต่ละอันเข้ากับแต่ละช่วงเวลา

ตามตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่ากราฟย่อยแบบสมบูรณ์ตาม 2 คือ กราฟย่อยที่มีจุดยอด 1 2 3 กราฟย่อย 1 5 6 และกราฟย่อย 3 4 5 ซึ่งรวมจุดยอดทั้ง 6 จุด

6 **<u>ด้านการกำหนดคลื่นความถี่วิทยุ</u>**

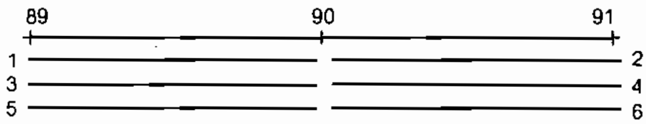
ตามระบบวิทยุเคลื่อนที่เช่นที่ตำรวจใช้กันอยู่ รถตำรวจแต่ละคันติดต่อถึงกันโดยใช้วิทยุ 2 ทาง ซึ่งช่องหนึ่งใช้คลื่นความถี่กำหนดล่วงหน้าในท้องถิ่น เพื่อป้องกันไม่ให้มีการใช้ช่องความถี่ซ้ำกันจากเขตท้องถิ่นที่ติดกันใกล้เคียงจะสามารถทำได้โดยสร้างกราฟแบบเข้ากันได้ ซึ่งจุดยอดแทนท้องถิ่นและเส้นเชื่อมแทนคู่ของท้องถิ่นที่ไม่ได้อยู่ติดกัน

1	2	3
4	5	6



ปัญหานี้คล้ายคลึงกับปัญหาการกำหนดสัญญาณไฟจราจรที่จัดสรรเวลาให้รถวิ่งผ่าน แต่ในที่นี้เป็นการจัดสรรช่วงความถี่คลื่นวิทยุ (เช่น 95.5 - 100.5 เมกาเฮอร์ต) ให้มีช่วงกว้างเพียงพอสำหรับแต่ละเขต ซึ่งแก้ปัญหาได้ด้วยการสร้างกราฟแบบเข้ากันได้ เพื่อหาชุดของกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ที่รวมจุดยอดแต่ละจุด จากนั้นจะกำหนดคลื่นวิทยุให้กับแต่ละกราฟย่อยแบบสมบูรณ์และแทนคลื่นวิทยุเหล่านี้ด้วยเส้นที่มีช่วงเปิด เช่น กราฟแบบเข้ากันได้ข้างต้นมีกราฟย่อยแบบ

สมบูรณ์ซึ่งมีจุดยอด 1 กับ 3 และ 5 และจุดยอด 1 กับ 4 และ 6 ตามวิธีนี้คือกำหนดกราฟย่อย 135 กับคลื่นความถี่ 89 - 90 เมกาเฮอร์ต และกราฟย่อย 246 กับคลื่นความถี่ 90 - 91 เมกาเฮอร์ต (ดังรูป)



7 **<u>ด้านโบราณคดี</u>**

ปลายศตวรรษที่แล้วนักโบราณคดีสนใจเครื่องปั้นดินเผาและศิลปวัตถุโบราณแบบต่าง ๆ ที่พบบริเวณสุสานอียิปต์หลายแห่งในช่วง 4000 - 2500 ปีก่อนคริสตกาลโดยเฉพาะอย่างยิ่ง เซอร์ฟลินเดอร์ เบทรี ใช้ข้อมูลจากสุสาน 900 แห่ง เพื่อพยายามจัดเรียงสุสานตามลำดับและกำหนดเวลาของศิลปวัตถุแต่ละชิ้นที่พบในสุสาน วิธีนี้เรียกว่าการ<u>กำหนดลำดับเวลา</u>

ตามวิธีการการกำหนดลำดับเวลาสุสานนี้ สมมุติว่าถ้ามีศิลปวัตถุโบราณ 2 ชิ้น แสดงว่าช่วงเวลาของวัตถุโบราณต้องคาบเกี่ยวกัน และเนื่องจากจำนวนสุสานที่พบมีจำนวนมาก ดังนั้นถ้าวัตถุโบราณ 2 ชิ้นคาบเกี่ยวกัน วัตถุโบราณทั้ง 2 ชิ้นนั้นต้องอยู่ในหลุมเดียวกัน

วิธีการกำหนดลำดับเวลาที่วงการโบราณคดีนำมาใช้ คือ การแทนข้อมูลด้วยกราฟแบบเข้ากันได้ โดยให้จุดยอดแทนวัตถุโบราณและเส้นเชื่อมโยงระหว่างวัตถุโบราณ 2 ชิ้นที่พบในสุสานเดียวกัน จากนั้นกำหนดกราฟแบบเข้ากันได้ในรูปของกราฟแบบช่วง นั่นคือ หาชุดของช่วงเวลาที่กราฟแบบช่วงที่สอดคล้องกับกราฟแบบเข้ากันได้ที่กำหนดให้ ช่วงเวลาเหล่านี้ สอดคล้องกับช่วงเวลาที่วัตถุโบราณถูกนำไปใช้ และช่วงเวลาที่คาบเกี่ยวกันสอดคล้องกับวัตถุโบราณซึ่งพบในหลุมฝังศพเดียวกัน

ปัญหาที่พบในการใช้วิธีการแบบนี้คือ จะมีช่วงเวลาที่หลากหลายแตกต่างกันแต่ใช้กราฟแบบเข้ากันได้อย่างเดียวกัน ทำให้ไม่สามารถเลือกกราฟแบบช่วงที่ถูกต้องเว้นแต่จะมีข้อมูลอื่นมาช่วย อย่างไรก็ดีการใช้กราฟแบบช่วงก็ประสบผลสำเร็จในหลายกรณี และทำให้ได้คำตอบเกี่ยวกับการกำหนดเวลาของวัตถุโบราณที่พบในทั้งในยุโรป และอเมริกา

8 **ด้านจิตวิทยา**

สมมุติว่าถ้าต้องการศึกษาลักษณะต่าง ๆ ที่พบในเด็กขณะกำลังเจริญเติบโตลักษณะเหล่านี้อาจปรากฏในช่วงระยะเวลาหนึ่งแล้วหายไปได้ ปัญหาคือการสร้างตารางเวลาที่ลักษณะต่าง ๆ ที่ปรากฏขึ้นเหล่านี้เรียงตามระยะเวลา ปัญหาแบบนี้สามารถทำได้ด้วยการศึกษาลักษณะเหล่านี้ในเด็กจำนวนหนึ่งและหาข้อสังเกตเมื่อลักษณะ 2 ชนิดแตกต่างกันถูกพบในเด็กคนเดียวกัน สถานะการณ์แบบนี้จะเหมือนกับการศึกษาในตัวอย่างด้านโบราณคดี แต่ในกรณีนี้วัตถุโบราณเปลี่ยนเป็นลักษณะเฉพาะ และสุสานเปลี่ยนเป็นเด็กด้วยการพิจารณาวิธีต่าง ๆ ซึ่งกราฟแบบเข้ากันได้สามารถใช้แทนได้ในรูปของกราฟแบบช่วง จะทำให้สามารถกำหนดลักษณะเฉพาะต่าง ๆ เรียงตามลำดับระยะเวลาได้ ซึ่งเท่ากับได้แก้ปัญหาตามต้องการ

9 **ด้านการจับคู่เอกสารเก่าแก่ซึ่งเป็นต้นฉบับ**

ได้มีการจัดเรียงลำดับเอกสารเก่าแก่ของกรีกและละตินต่าง ๆ เช่น เอกสารของเพลโตได้รับการศึกษาโดยละเอียด และวิธีการวิเคราะห์โดยใช้การเปลี่ยนแปลงในสไตล์ ของผู้เขียนด้วยการศึกษาวิธีการใช้ จังหวะด้านร้อยแก้ว ในกรณีของเพลโต การศึกษาเน้นที่ตอนจบของประโยคเพราะเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดของประโยค แต่ละตอนจบของประโยคประกอบด้วย 5 พยางค์สุดท้ายจะสั้นหรือยาวก็ได้ และความถี่ขององค์ประกอบคือ 2^5 ของสัญลักษณ์เหล่านี้ได้รับการคำนวณออกมาสำหรับงานของเพลโตแต่ละชิ้น ข้อมูลจะถูกกำหนดในรูปกราฟ โดยตั้งข้อสังเกตจากการปรากฏขึ้นของแต่ละตอนจบของประโยค แล้วเขียนขึ้นในรูปของกราฟแบบเข้ากันได้ที่สอดคล้องกับข้อมูล จากนั้นตรวจหาลำดับที่น่าจะเป็นไปได้ด้วยการพิจารณาจากวิธีต่าง ๆ ที่กราฟสามารถเขียนแทนได้ในรูปของกราฟแบบช่วง วิธีการแบบนี้ได้รับการนำไปใช้ในการหาผู้เขียนของชิ้นงานเก่าแก่ที่มีปัญหาถกเถียงกันในเรื่องของผู้เขียน เช่น คัมภีร์ไบเบิล (ใหม่) และบทละครของเชคสเปียร์ก็ถูกมาวิเคราะห์โดยวิธีการนี้เช่นเดียวกัน

10 **พันธุกรรม**

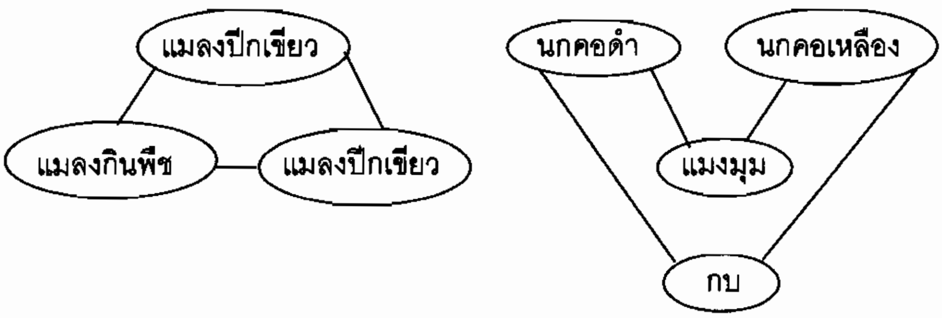
นักพันธุกรรม ถือว่าโครโมโซมเป็นการจัดเรียงแบบเชิงเส้นของหน่วยกรรมพันธุ์สิ่งที่ต้องการรู้คือโครงสร้างซึ่งละเอียดอ่อนในหน่วยกรรมพันธ์มีการจัดเรียงเป็นแบบเชิงเส้นด้วยหรือไม่

แต่เพราะหน่วยกรรมพันธ์มีรายละเอียดที่เกี่ยวข้องมากมายจึงไม่สามารถตรวจสังเกตได้โดยตรง ต้องใช้วิธีศึกษาจากการเปลี่ยนแปลงด้านโครงสร้างของหน่วยกรรมพันธ์แทน

จากการศึกษาโครงสร้างของหน่วยกรรมพันธ์ของจุรินทรีย์ไวรัสชื่อ T_4 ศาสตราจารย์ เบนเซอร์ ซีมัวร์ พบว่าโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นเมื่อบางส่วนของหน่วยกรรมพันธ์ขาดหายไป โดยเฉพาะถ้าบางส่วนของหน่วยกรรมพันธ์เกิดการซ้อนเหลื่อมกัน จากการวิเคราะห์โดยใช้กราฟแบบเข้ากันได้กับการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างไม่ต่ำกว่า 145 หน่วยได้พบว่าเชื้อไวรัสชนิดนี้มีการจัดเรียงตัวในแบบเชิงเส้น

11 <u>สิ่งแวดล้อม</u>

โดยหลักธรรมชาติ นกกินปลาและแมลง งูกินกบ กบกินหอยทาก แมงมุม และแมลง ฯลฯ ลักษณะความสัมพันธ์ในเชิงของผู้ล่าและผู้ถูกล่าเป็นอาหาร ถ้านักนิเวศน์วิทยา จะวิเคราะห์พฤติกรรมของสัตว์ในเชิงการล่าเหยื่อจะใช้วิธีการอย่างไร เนื่องจากสัตว์หลายชนิดกินอาหารชนิดเดียวกัน นักนิเวศน์วิทยาจะใช้กราฟแสดงการแข่งกันล่าเหยื่อของผู้ล่า เช่น กราฟต่อไปนี้



ในทางปฏิบัติสามารถใช้กราฟแบบช่วงแสดงชนิดของสัตว์ต่อปัจจัยเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม เช่น อุณหภูมิ ความชื้น หรือความสูง เช่นกราฟแบบช่วงต่อไปนี้แสดงให้รู้ว่าแมลงปีกเขียว แมลงปีกแข็งและแมลงกินพืช มีพฤติกรรมการหาอาหารเหมือนกัน และนก กบ กับแมงมุมมีพฤติกรรมการหาอาการแบบเดียวกัน

แมลงปีกเขียว นก

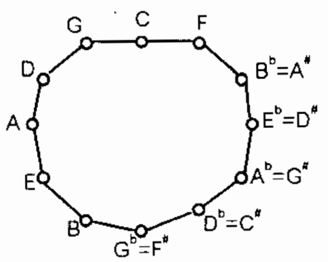
แมลงปีกแข็ง กบ

ดอกหญ้า หอยทาก งู แมลงกินพืช แมงมุม

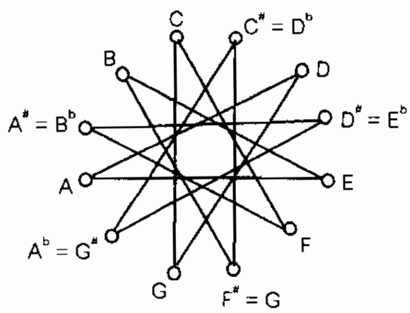
12 **ด้านดนตรี**

ทางด้านดนตรี เมื่อมีการเปลี่ยนระดับเสียงของดนตรีเฉพาะแบบ จะได้ท่วงทำนองที่เป็นธรรมชาติ เช่น การเปลี่ยนระดับเสียงจาก C เมเจอร์ ไปที่ F เมเจอร์ จะมีลักษณะที่เป็นธรรมชาติมาก เพราะมีการเปลี่ยนโนตเพียงตัวเดียว (B เป็น B^b)

การได้มาของระดับเสียงระหว่าง C กับ F ด้วยการเปลี่ยนโนตเพียงตัวเดียวในแบบนี้ถือเป็นความสัมพันธ์ที่สามารถแสดงให้เห็นด้วยกราฟได้ นั่นคือ ให้จุดแทนระดับเสียง และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ระหว่างระดับเสียงที่เปลี่ยนไปมาถึงกันด้วย การเปลี่ยนตัวโนตเพียง 1 ตัว และให้เสียงที่เป็นธรรมชาติ โดยวิธีนี้จะได้กราฟ12 จุด หรือ C_{12} ดังนี้

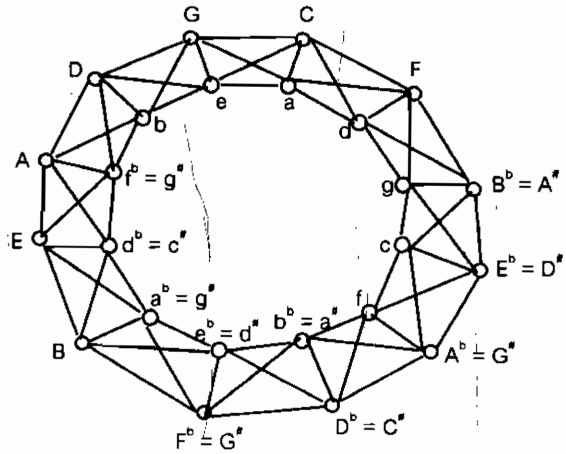


หรือ



ในกรณีของระดับเสียงไมเนอร์มีปัญหาบ้าง เพราะว่ามีระดับเสียงไมเนอร์มากมายที่ให้เสียงที่เป็นธรรมชาติเมื่อเปลี่ยนตัวโนต ในกรณีนี้ถือว่าเป็นปกติที่จะกำหนดว่าระดับเสียงหนึ่งมีระดับเสียงอีก 5 ระดับที่สัมพันธ์กัน เช่น C เมเจอร์ สัมพันธ์กับ G เมเจอร์ และ F เมเจอร์ และรวมถึง A ไมเนอร์ E ไมเนอร์ และ D ไมเนอร์ เมื่อโยงระดับเสียงเหล่านี้เข้าด้วยกัน

จะได้กราฟที่มี 24 จุดยอด และเป็นกราฟปกติที่มีดีกรี 5 ดังนี้



กราฟนี้มีประโยชน์ในการวิเคราะห์ให้เห็นลำดับการเปลี่ยนระดับเสียง ทั้งนี้เพราะว่าทำนองเสียงดนตรีเกิดจากการเปลี่ยนระดับเสียงที่เป็นพื้นฐานตามที่เห็นในกราฟ เช่น ทำนอง C$^\#$ ไมเนอร์ ถึง G เมเจอร์ คือการเปลี่ยนระดับเสียงพื้นฐาน 3 ส่วนประกอบ (C$^\#$ ไมเนอร์ไป F$^\#$ ไมเนอร์ และ F$^\#$ ไมเนอร์ ไป B ไมเนอร์ และ B ไมเนอร์ ไป G เมเจอร์) ซึ่งแสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟความยาว 3 กล่าวโดยสรุป คือ ทำนองเสียงดนตรีสมนัยกับวิถีในกราฟ และใช้ความยาวของวิถีซึ่งสั้นที่สุด ระหว่าง 2 ระดับเสียงว่าเป็นตัวชี้ของความห่างไกลระหว่างระดับเสียง 2 ระดับนั้น เช่น ทำนอง C เมเจอร์ถึง F$^\#$ เมเจอร์ (วิถียาว 6) มีความห่างไกลมากกว่า ทำนอง D$^\#$ เมเจอร์ ถึง A^b ไมเนอร์ (วิถียาว 4) ซึ่งห่างไกลมากกว่าทำนอง B^b เมเจอร์ถึง C ไมเนอร์ (วิถียาว 1) และตามกฎทั่วไปวิถีในกราฟยาวมากเท่าใดการเปลี่ยนระดับเสียงยิ่งแปร่งมากเท่านั้น

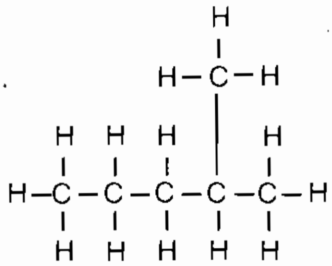
กราฟในตัวอย่างนี้เป็นเพียงกราฟหนึ่งในหลาย ๆ กราฟที่นักแต่งเพลงหลายคนใช้ เช่น มาคซ์ มิลตัน เป็นต้น

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

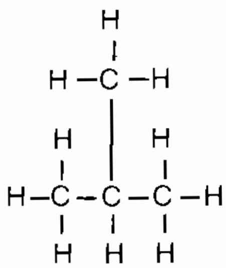
แบบฝึกหัด

1. ให้เขียนกราฟของโมเลกุลคาร์บอนต่อไปนี้

ก.



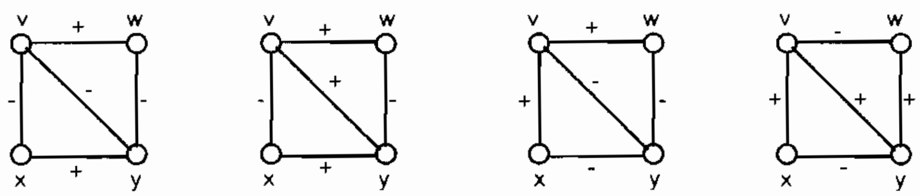
ข.



2. ให้เขียนกราฟของสูตรเคมีต่อไปนี้

ก. $C_6 H_{14}$ ข. $C_3 H_7 OH$ ค. $C_7 H_{15} OH$ ง. $C_5 H_{11} OH$

3. ให้หาว่ากราฟเครื่องหมายแบบใดต่อไปนี้มีความสมดุลย์ และให้หากราฟแบ่งกั้นที่สมนัยกับกราฟเครื่องหมาย



ก ข ค ง

4. จอห์น ชอบ โจแอน จีน และเจน แต่ จอห์น ไม่ชอบโจ กับ วิลล์ จิลชอบโจ แต่โจ ไม่ชอบโจแอน จีนและเจน โจแอน จีน และเจนชอบซึ่งกันและกัน แต่ต่างคนต่างไม่ชอลวิลล์ ให้เขียนกราฟเครื่องหมาย แทนความสัมพันธ์และให้อธิบายว่ากราฟนี้สมดุลย์หรือไม่

5. ให้จำลองสถานะการณ์ต่อไปนี้ด้วยกราฟเครื่องหมาย และให้อธิบายว่าความสัมพันธ์เป็นแบบสมดุลย์หรือไม่ (ให้ความสัมพันธ์เป็นแบบสมมาตรได้นั่นคือ ถ้า x ชอบ y y ชอบ x)

   ก. A ชอบ C และ E แต่ A ไม่ชอบ B กับ D B ชอบ D แต่ไม่ชอบ C D ไม่ชอบ C และ E

   ข. A ชอบ Bกับ D แต่ไม่ชอบ E Bไม่ชอบ C D และ E D ไม่ชอบ C กับ E

   ค. แจ็ค ชอบ ลิน และ มิก แต่ไม่ชอบ แคท มิก ไม่ชอบ อิ๋ว กับ แคท ลิน ไม่ชอบ อิ๋ว แคต และ มิก

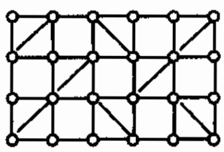
   ง. มาร์ค ชอบ แอนกับลิซ แต่ไม่ชอบจิ๋ว กับ แกละ แกละไม่ชอบแอนกับลิซ จิ๋วชอบแกละ แต่ไม่ชอบลิซ

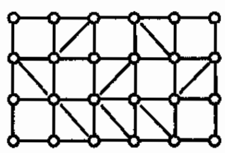
6. จงอธิบายให้เห็นว่าทุกวงเวียนในกราฟเครื่องหมายแบบสมดุลย์มีเส้นเชื่อมลบเป็นจำนวนคู่ (0 เป็นจำนวนคู่)

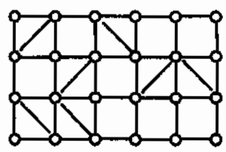
7. จงแสดงให้เห็นว่ากราฟเครื่องหมายในข้อ 3 ที่เป็นแบบสมดุลย์มีเส้นเชื่อมลบเป็นจำนวนคู่

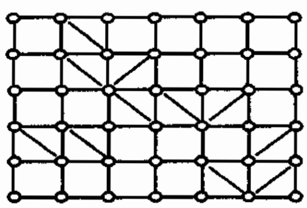
8. ให้เขียนกราฟต้นไม้แสดงโครงสร้างประโยคภาษาอังกฤษ "Good pupils read books"

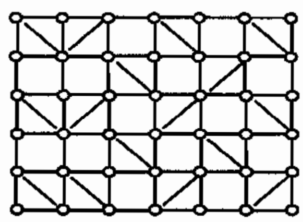
9. ให้ใช้กราฟแบ่งกั้นพิจารณาว่าโครงสร้างต่อไปนี้ใช้คานเสริมมากน้อยเกินไป หรือพอดี

ก 

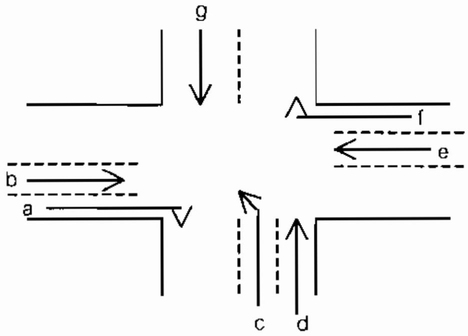
ข 

ค 

ง 

จ 

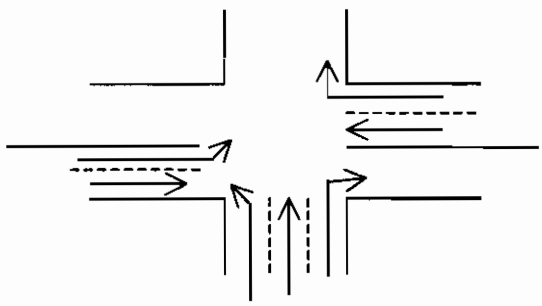
10. แผนผังเส้นทางเดินรถบริเวณสี่แยกแห่งหนึ่ง



ซึ่งในการแก้ไขปัญหาการให้สัญญาณไฟจราจร จะต้องหาชุดของกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ของกราฟ G แบบเข้ากันได้ที่รวมทุกจุดของกราฟ G ชุดของกราฟย่อยต่อไปนี้เป็นแบบสมบูรณ์หรือไม่

ก. {abc, cdg, ef}　　　ข. {abcf, acd, fg}

11. จากแผนผังเส้นทางเดินรถต่อไปนี้



ก. ให้เขียนแบบเข้ากันได้ G

ข. ให้หาชุดของกราฟย่อยแบบสมบูรณ์ที่รวมแต่ละจุดของ G

ค. ให้ใช้ผลจากข้อ ข. หาลำดับการเปิดสัญญาณไฟจราจรที่เหมาะสมและหาเวลาที่ต้องรอทั้งหมด ถ้ากำหนดว่าสัญญาณไฟมีจังหวะหมุนเวียน 60 วินาที

12. การเปลี่ยนลำดับเสียงดนตรีในข้อใดมีระยะห่างน้อยที่สุด

ก. $A^{\flat}$ ไมเนอร์ ไป $G^{\#}$ เมเจอร์　　　ข. D ไมเนอร์ ไป $B^{\flat}$ ไมเนอร์

ค. A เมเจอร์ไป $D^{\#}$ ไมเนอร์

ง. $G^{\#}$ ไมเนอร์ไป D^{b} เมเจอร์

จ. D เมเจอร์ไป E^{b} ไมเนอร์

ฉ. $A^{\#}$ ไมเนอร์ไป F เมเจอร์

ช. $F^{\#}$ ไมเนอร์ไป $F^{\#}$ เมเจอร์

ซ. $D^{\#}$ เมเจอร์ไป $C^{\#}$ ไมเนอร์

บรรณานุกรม

N. Biggs, E. Lloyd and R. Wilson, *Graph Theory 1736 1936, Oxford University* Press, New York, 1976.

J. Bondy and U. Murty, *Graph Theory and Applications,* American Elsevier, New York, 1976.

M. Capobianco and J. Molluzzo, *Examples and Counterexamples in Graph Theory,* North Holland, New York, 1978

G. Chartrand, *Graph as Mathematical Models,* Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1977

N. Chrisofides, *Graph Theory: An Algorillnnic Approach,* Academic Press, New York, 1975

N. Deo, *Graph Theory with Applications to Engimeering and Computer Science,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974

J. Graver and M. Watkins, *Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs,* Springer-Verlay, New York, 1977

F. Harary, *Graph Theory,* Addison-Wesley, Frading, Mass., 1969

O. Ore, *Graphs and Their Uses*, Math, Assoc. of America, Washington, 1963.

F. Roberts, *Discrete Mathematical Models,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

R. Trudeau, *Dots and Lines*, Kent State Press, Kent, Ohio, 1976.

R. Wilson, *Introduction to Graph Theory,* Academic Press, New York, 1972.

M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster, *Graphs and Digraphs,* Wadsworth, Belmont, Calif., 1979.

C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, New York, 1973.

พิมพ์ที่... สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
Ramkhamhaeng University Press.